



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guida per l'utilizzo

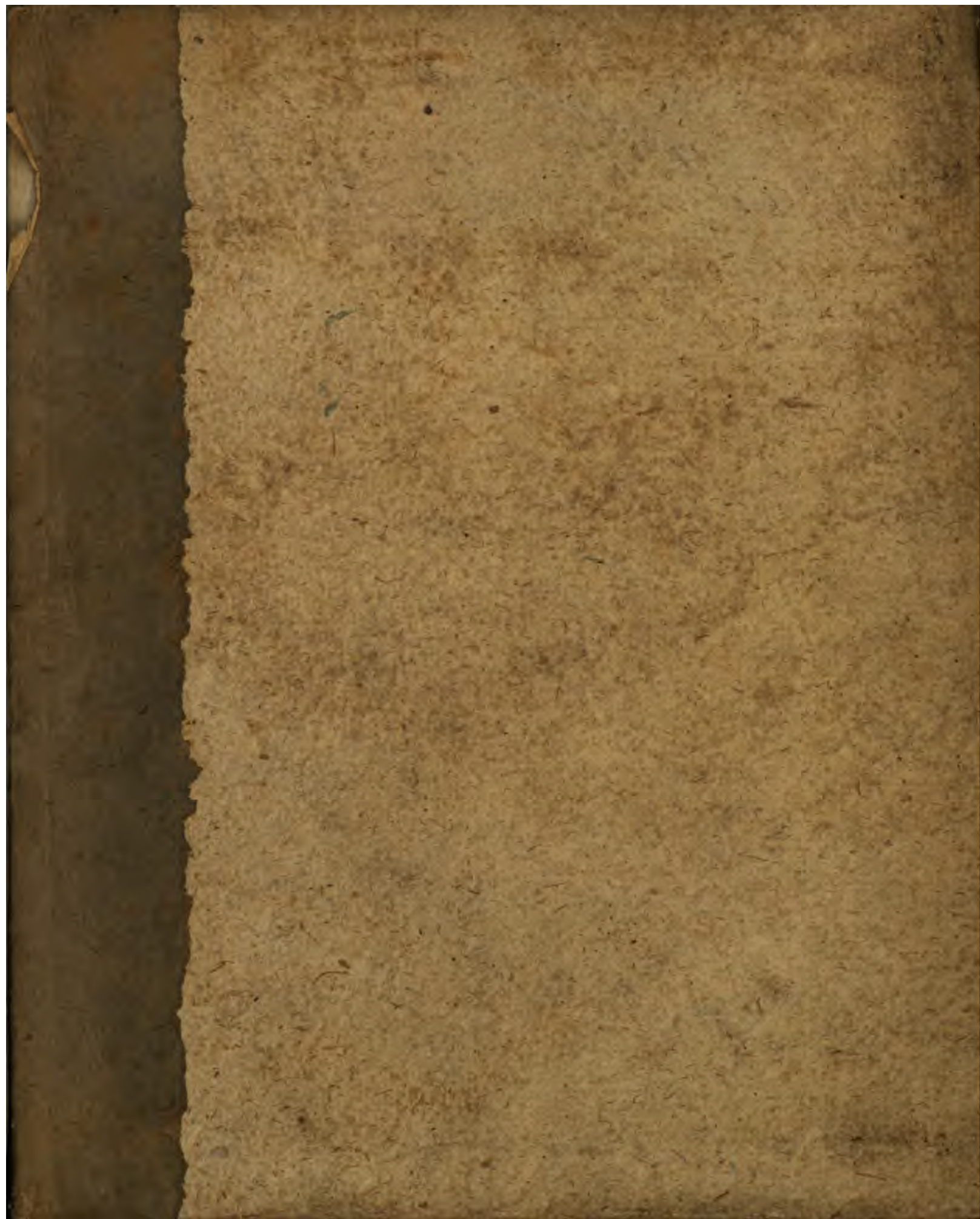
Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

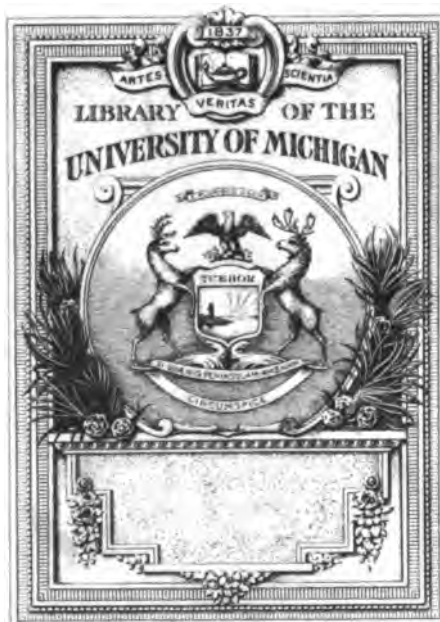
La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>



BIBLIOTECA RICCARDI

in Modena

S. I. F. & N. 16



a pag. 54 dove alcune proprietà delle coniche si p[ro]v[ano].

La $y^2 = px + \frac{p^2 x^2}{a}$ deve in caso di p[ro]p[rietà]

nel termine $\frac{p^2 x^2}{a}$ porre $\frac{p}{a}$, e quindi:

allora si ha $\frac{px^2}{a}$. La ragione è facile a trovarsi.

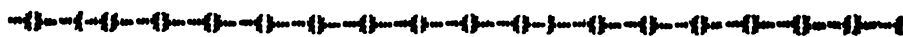
QA
302
.A44



BREVI ELEMENTI
DI CALCOLO DIFFERENZIALE
DI
GAETANO ALLODI
AGGIUNTO
AL R. OSSERVATORIO DI MILANO.



IN MILANO)o(MDCCLXXXIV.



Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.
Con Approvazione.

A SUA ECCELLENZA

GIO. GIUSEPPE

DEL SACRO ROMANO IMPERO

CONTE DE WILZECK

BARONE DE HULTSCHIN

E GUTTELAND

GENTILUOMO DI CAMERA

E CONSIG. INTIMO ATTUALE DI STATO

DI S. M. I. R. APOSTOLICA

GENERALE SOVRAINTENDENTE

E GIUDICE SUPREMO

DELLE REGIE POSTE

MINISTRO PLENIPOTENZIARIO

DELLA MAESTA' SUA

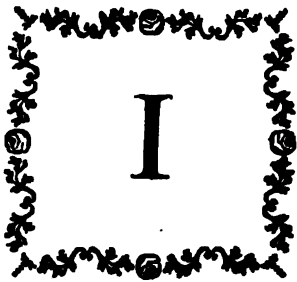
PIÙ PRESSO IL GOVERNO GENERALE

DELLA LOMBARDIA AUSTRIACA

E COMMISSARIO PLENIPOTENZIARIO

IMPERIALE IN ITALIA CC. CC.

ECCELLENZA .



Felici progressi che l' E. V.
incessantemente procura alle Scienze ed alle
belle Arti , di cui è special protettore

e fautor singolarissimo , mi danno animo a sperare , che l'E. V. si degnerà accogliere favorevolmente questo piccol libro ed onorarlo di sua protezione : In esso ho io procurato , componendolo , di stendere con chiarezza e precisione quella parte dell' Analisi infinita , che al Calcolo Differenziale appartiene ; e nell' offerirne all' E. V. il tenue omaggio , ho il bene di unire la mia alla universale venerazione , colla quale vengono riguardate le sue virtù , e di dare un ossequioso attestato di que' sinceri sentimenti di alta stima e di profondo rispetto , con cui mi protesto

Dell' E. V.

Umilissimo, devotissimo, obbligatissimo servidore
GAETANO ALLODI.

A CHI LEGGE.

*L'*Operetta, che ora vi presento o cortese Lettore, contiene gli elementi del Calcolo Differenziale: Essa non vi suppone affatto novizio nelle Matematiche, ma richiede in voi una sufficiente cognizione dell'Algebra finita, della Geometria elementare, e delle sezioni del Cono. Lo scopo mio in questi brevi elementi si è di addestrarvi nelle regole, e nelle applicazioni del Calcolo Differenziale, e di appianarvi la strada per cui giugner possiate allo studio importantissimo del Calcolo Integrale, del Calcolo delle Variazioni e delle teorie più sublimi, ed interessanti dell'infinita Analisi.

INDICE DE' CAPI.

Capo I. N Ozioni e Regole del Calcolo Differenziale nelle quantità e funzioni Algebriche.	pag. 1
Capo II. Differenziali delle funzioni ^{logaritmiche} e circo- lari.	13
Capo III. Differenziali d'ordine Superiore.	23
Capo IV. Ufo del Calcolo Differenziale nella formazione delle serie infinite.	27
Capo V. Ufo del Calcolo Differenziale nelle approssimazioni alle radici reali delle equazioni di grado superiore.	43
Capo VI. Del metodo diretto delle tangenti.	51
Capo VII. Della frazione $\frac{0}{0}$, e delle tangenti ai punti mul- tiple delle Curve.	78
Capo VIII. De' Massimi e Minimi.	88
Capo IX. Delle Evolute, e de' Raggi osculatori nelle Curve.	115
Capo X. De' punti di Flesso contrario e di Regresso, e de' punti Serpentine nelle Curve.	133

Lib. Con
maxima
24125
10010

CAPO PRIMO.

NOZIONI E REGOLE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE NELLE QUANTITÀ E FUNZIONI (*) ALGEBRICHE.

I.

Quantità *variabile* si dice quella che in un dato problema si cambia al cambiarsi di qualche dato, e *quantità costante* quella che conserva sempre lo stesso valore, qualunque cambiamento accada nei dati dello stesso problema. Per esempio in una data sezione conica riferita ad un dato diametro a tutte le successive ascisse corrispondono delle ordinate, degli archi, degli spazj di diverso valore, e viceversa: Dunque tutte queste funzioni nella sezione sono quantità variabili. All' opposto il parametro della stessa sezione è una quantità costante, poichè variando le ascisse, le ordinate, gli archi, gli spazj ec., esso non cambia valore.

II.

Quantità, o grandezza finita è quella di cui se ne possono assegnare delle altre omogenee maggiori e minori. Da questa ne derivano le altre due *l' infinita*, e *l' infinitamente piccola*. Se una quantità finita può concepirsi ingrandita senza fine ed oltre ogni dato termine, essa si chiama *infinita*. Se la medesima quantità finita può concepirsi oltre ogni termine impiccolita essa si dice *infinitamente piccola*.

A

(*) Col nome di funzione d'una quantità s'intende una qualunque algebrica espressione, in cui quella quantità entra di qualivisia maniera.

III.

Quindi 1.° Le quantità infinite ed infinitamente piccole sono quelle che si suppongono astrattamente, ed indefinitamente maggiori, o minori d'ogn' altra quantità finita omogenea. 2.° Esse quantità infinite ed infinitamente piccole sono perciò inassegnabili da veruna quantità finita e determinata.

IV.

Ciò posto sia dx una quantità infinitamente piccola ed omogenea alla variabile finita x , e s'intenda che x diventi $x + dx$, ovvero $x - dx$. La quantità infinitamente piccola dx , di cui la variabile x si suppone accresciuta o diminuita, si chiama *Differenziale*, *Flussione*, od *Elemento infinitesimo* di x . La lettera d che precede la x quì non dinota una quantità che moltiplica la x , ma il differenziale della stessa x .

Secondo questa diffinizione il differenziale d'una quantità variabile non è che *la differenza tra lo stato della stessa variabile avanti un cambiamento infinitamente piccolo, ed il di lei stato dopo questo cambiamento.*

V.

Nel calcolo delle quantità infinitamente piccole si distinguono differenti ordini di differenziali. Si chiama *Differenziale di 1.° ordine* quello che abbiamo or ora diffinito, cioè la *flussione* d'ogni quantità variabile: *Differenziale di 2.° ordine* la *flussione* di questo primo differenziale considerato ancor esso come quantità variabile: *Differenziale di 3.° ordine* la *flussione* di un differenziale di 2.°, e così di seguito.

Le quantità costanti d'ordinario si esprimono colle prime lettere dell' alfabeto, e le variabili colle ultime. Il

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ec. 3

differenziale di 1.^o ordine si dinota, come si è detto, colla lettera iniziale d scritta alla sinistra della variabile; il differenziale di 2.^o ordine colle due lettere dd , oppure colla sola cifra d^2 scritta allo stesso sito; il differenziale di 3.^o ordine colle tre lettere ddd , o più brevemente colla cifra d^3 ec. Noi dunque in progresso non altrimenti ci serviremo delle lettere d^1 , d^2 , d^3 ec. che per caratteristiche dei differenziali di 1.^o, 2.^o, 3.^o, ... ec. ordine delle quantità variabili, di sorte che, se x esprimerà una variabile finita, dx ci indicherà il di lei differenziale di 1.^o ordine, d^2x quello di 2.^o ordine, d^3x quello di 3.^o, e in generale il differenziale di ordine m^{esimo} della quantità x si esprimerà per d^mx . Solo si avverta che ciascuno di questi differenziali deve scriversi col segno positivo se per esso cresce la variabile, e col negativo se la variabile decresce.

La quantità costante non essendo soggetta a veruna variazione, benchè infinitesima di qualsivoglia ordine, non ha differenziale di veruna sorte; cioè qualunque suo differenziale è eguale a zero.

VI.

Per poco che si rifletta sulle quantità infinitesime di ordine superiore si capisce facilmente che un' infinitesima di 2.^o ordine deve essere rispetto ad una di 1.^o ciò che una di 1.^o è rispetto alla quantità finita, ovvero all' unità, che un' infinitesima di 3.^o ordine è rispetto ad una di 1.^o ciò che una di 2.^o è rispetto alla quantità finita, e così delle altre. Quindi data una quantità infinitamente piccola sarà facile il conoscere l'ordine infinitesimo a cui essa appartiene. Per esempio $dxdy$ è infinitesimo di 2.^o ordine, poichè $dxdy : dx :: dy : 1$; $dxdydz$ è di 3.^o, poichè $dxdydz : dx :: dydz : 1$ ec.

Dunque il prodotto di 2, di 3, di 4, ec. quantità infinite-
sime di primo ordine è un' infinitesima di 2.^o, di 3.^o, di
4.^o ec. ordine rispetto alla quantità finita od all' unità.

Allo stesso modo si dimostra che il quadrato, il cu-
bo, e in generale la potenza m^{esima} del differenziale dx
è un' infinitesima di 2.^o, di 3.^o, di m^{esimo} ordine:
Queste potenze di dx si scrivono d' ordinario in questo
modo dx^2 , dx^3 , dx^m . Convien però osservare a non
confondere queste potenze di dx co' Differenziali di 1.^o or-
dine delle varie potenze di x , cioè co' Differenziali di x^2 ,
 x^3 , x^m , i quali, a scanso d' ogni equivoco, si pos-
sono scrivere così $d(x^2)$, $d(x^3)$, $d(x^m)$.

VII.

Calcolo Infinitesimale si chiama l'analisi, ovvero il
modo di calcolare tutte le predette quantità infinitamente
piccole. Sua prima parte è il *Calcolo Differenziale*, chiamato
altrimenti *Metodo diretto delle flussioni*, perchè insegna a
ritrovare i differenziali di ogni ordine per le varie funzioni
di una o più variabili. La seconda parte si chiama *Calcolo
Integrale*, o *Metodo inverso delle flussioni*, e consiste nel re-
gresso del Calcolo differenziale, ovvero nel metodo di ri-
trovare la funzione a cui appartiene un dato differenziale.

Il principio a cui le regole di questi due Calcoli sono
appoggiate è il seguente:

VIII.

*Se due quantità finite, ed in se determinate non diffe-
riscono tra loro che di qualche quantità infinitamente piccola
esse si devono assumere per eguali.* Poichè egli è evidente che
se due quantità finite omogenee non fossero eguali, ma aves-

fero tra loro alcuna differenza, questa sarebbe finita. Dunque se tra due quantità finite omogenee non passa una differenza finita, quelle due quantità sono tra loro eguali; cioè se la supposta differenza è infinitamente piccola, le due quantità finite sono rigorosamente eguali tra loro. Parimente devono assumersi per eguali due quantità infinitesime di qualsiasi ordine quando non differiscono che di qualche infinitesima di ordine superiore. Cioè le quantità infinitesime di ogni ordine devono sempre dispreggiarsi nel calcolo quando ritrovansi unite co' segni $+0-$ a quantità finite od infinitamente piccole di ordine inferiore.

IX.

PROBLEMA. 1.° Cercare il Differenziale della somma o della differenza di più quantità semplici variabili, e costanti

Sia proposta la funzione $x+y-z+a-b$, nella quale x, y, z sono quantità variabili, ed a, b quantità costanti.

La quantità x dopo di avere variato d'una porzione infinitamente piccola si muta in $x+dx$, la y in $y+dy$, la z in $z+dz$, le quantità a, b non possono variare perchè sono costanti, e la funzione data si muta in $x+dx+y+dy-z-dz+a-b$. Il differenziale d'una data funzione è la differenza tra lo stato della medesima avanti un cambiamento infinitamente piccolo, ed il di lei stato dopo questo cambiamento (IV.): dunque il differenziale cercato farà la differenza tra $x+y-z+a-b$, ed $x+dx+y+dy-z-dz+a-b$, così esso farà $dx+dy-dz$.

X.

COROLLARIO. 1.° Quindi per avere il Differenziale della somma, o della differenza di più quantità semplici

variabili, e costanti si uniranno insieme i differenziali delle sole variabili co' loro proprj segni.

XI.

COROLLARIO 2.° Tutte le quantità costanti aggiunte o levate da una funzione di quantità variabili non mutano il di lei differenziale; poichè $dx + dy - dz$ è il differenziale non meno di $x + y - z$, che di $x + y - z + a - b$. Dunque se due o più funzioni non differiscono tra loro che di quantità costanti, comunque aggiunte o sottratte, avranno uno stesso differenziale.

XII.

PROBLEMA 2.° Cercare il Differenziale del prodotto di più quantità variabili, e costanti.

Sia primieramente il prodotto ax d'una variabile x , e d'una costante a . Per ritrovare il suo differenziale si rifletta che x dopo un cambiamento infinitamente piccolo diventa $x + dx$, ed il suo prodotto con a si cambia in $ax + adx$; dunque tolto da questo prodotto il dato ax , il residuo adx farà il differenziale cercato di ax .

Sia in 2.° luogo il prodotto xy di due variabili. Dopo un cambiamento infinitamente piccolo x si cambia in $x + dx$, y in $y + dy$, ed il prodotto loro xy in $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Dunque l'eccesso del prodotto $xy + xdy + ydx + dxdy$ sopra xy , cioè $xdy + ydx + dxdy$ farà il differenziale di xy , e trascurando la quantità infinitesima di 2.° ordine $dxdy$, la quale svanisce in confronto delle altre, farà il medesimo differenziale $xdy + ydx$.

Sia inoltre il prodotto xyz di tre variabili. Dopo il solito cambiamento sopravvenuto in ciascuna variabile, il

prodotto xyz si cambia in $(x + dx) \cdot (y + dy) \cdot (z + dz) = xyz + yzdx + xzdy + zdx dy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$. Dunque tolto xyz da questo prodotto, e trascurati tutti i termini di ordine inferiore, si avrà $xydz + xzdy + yzdx$ pel differenziale di xyz .

Allo stesso modo operando si trova $d(xyzv) = xyzdv + xyvdx + xvdy + yzvdx$ (*).

XIII.

COROLLARIO 1.º Da tutte queste funzioni differenziate si ricava generalmente, che *il Differenziale del prodotto di più quantità variabili, e costanti si trova moltiplicando il differenziale di ciascuna variabile pel prodotto di tutte le altre quantità variabili, e costanti, e sommando insieme tutti i prodotti.*

XIV.

COROLLARIO 2.º Con questa regola si ha

$$\begin{aligned} d(x+a) \cdot y + b &= (x+a) \cdot d(y+b) + (y+b) \cdot d(x+a); \\ \text{ma } (x+a) \cdot d(y+b) &= (x+a) \cdot dy = xdy + ady, \\ \text{ed } (y+b) \cdot d(x+a) &= (y+b) \cdot dx = ydx + bdx \end{aligned}$$

(*) Trovato il differenziale del prodotto di due variabili xy , i differenziali degli altri prodotti xyz , $xyzv$ si possono ottenere con semplici sostituzioni. Cerchisi per esempio il differenziale di xyz : posto $xy = p$ si avrà $xyz = pz$, e $d(xyz) = d(pz)$; ma pel caso delle due variabili deve essere $d(pz) = pdz + zdp$: dunque sarà $d(xyz) = pdz + zdp$, ed essendo parimente $dp = d(xy) = xdy + ydx$ sarà $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

Similmente richiamato il prodotto $xyzv$ alla forma pv coll' eguagliare xyz a p si avrà $d(xyzv) = d(pv) = pdv + vdp$; ma $dp = d(xyz) =$ (pel caso precedente) $xydz + xzdy + yzdx$. Dunque sarà $d(xyzv) = xyzdv + xyvdx + xvdy + yzvdx$.

NOZIONI E REGOLE

$$\begin{aligned} \text{Dunque } d(\overline{x+a} \cdot \overline{y+b}) &= xdy + ady + ydx + bdx \\ d(\overline{xy \cdot z+v}) &= d(\overline{xyz+xyv}) = d(\overline{xyz}) + d(\overline{xyv}) = ydz + xzdy + yxdx \\ &+ xydv + xvydy + yvdx. \end{aligned}$$

XV.

PROBLEMA. 3.° Cercare il Differenziale di un quoto, o di una frazione i cui termini sono variabili.

Sia questa frazione $\frac{x}{y}$

Si sostituiscia $x+dx$ ad x , ed $y+dy$ ad y ; si avrà la frazione trasformata $\frac{x+dx}{y+dy}$. Ma dall' attuale divisione si ha $\frac{x+dx}{y+dy} = \frac{x}{y} + \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} - \frac{dx dy}{y^2} + \frac{xdy^2}{y^3} + \dots$ ec. Dunque questa serie è lo stato di $\frac{x}{y}$ dopo un cambiamento infinitamente piccolo, e però il differenziale cercato farà questa serie diminuita di $\frac{x}{y}$, e delle inutili quantità infinitesime d'ordine superiore; cioè esso farà $\frac{dx}{dy} - \frac{xdy}{y^2}$, ossia ridotti i termini al medesimo denominatore, $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ (*).

Co.

(*) Questo differenziale si ottiene ancora col mezzo d'una sostituzione.

$$\begin{aligned} \text{Si faccia } \frac{x}{y} &= z; \text{ farà } x = zy, d(\frac{x}{y}) = dz, \text{ e } dx = zdy + ydz; \\ \text{onde } dz &= \frac{dx - zdy}{y}, \text{ cioè rimettendo } \frac{x}{y} \text{ in luogo di } z, dz = \frac{dx - \frac{xdy}{y}}{y} \\ &= \frac{ydx - xdy}{y^2}. \text{ Dunque } d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}. \end{aligned}$$

XVI.

COROLLARIO 1.° Quindi per differenziare un quoto od una frazione, i cui termini sono variabili, si moltiplichi il differenziale del numeratore pel denominatore, ed il differenziale del denominatore pel numeratore, si sottragga questo secondo prodotto dal primo, e si divida il residuo pel quadrato del denominatore.

XVII.

COROLLARIO. 2.° Il differenziale di $\frac{x}{a}$ è $\frac{dx}{a}$, e quello di $\frac{a}{x}$ è $-\frac{adx}{x^2}$: poichè, posto $da = 0$, si ha $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{a^2} = \frac{adx}{a^2} = \frac{dx}{a}$, e $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{xda - adx}{x^2} = -\frac{adx}{x^2}$. Dunque le costanti, per cui sono o moltiplicati o divisi i termini di una frazione variabile, punto non alterano le regole di differenziare, rimanendo esse ne' differenziali quali erano nella frazione prima di differenziarsi.

XVIII.

COROLLARIO 3.° Della regola generale stabilira si ha

$$d\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{z d(xy) - xydz}{z^2} = \frac{zxdy + yzdx - xydz}{z^2}.$$

$$d\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{(x-a).d(x+a) - (x+a).d(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{2adx}{(x-a)^2}.$$

$$d\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{(x-y).d(x+y) - (x+y).d(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2}.$$

XIX.

PROBLEMA. 4.° Cercare il differenziale di una varia-

B

bile x elevata ad una potenza di qualunque esponente m positivo, negativo, intero, o fratto.

Alla variabile x sostituito $x + dx$ invece di x si avrà la trasformata potenza $(x + dx)^m$. Ma per la notissima formola del binomio $(x + dx)^m = x^m + mx^{m-1} dx + \frac{m \cdot m-1}{2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} x^{m-3} dx^3 + \dots$ ec.

Dunque sottratto x^m da questa serie, e neglimentati tutti i termini in cui dx è inalzata a qualche grado di potenza, perchè evanescenti in confronto di $mx^{m-1} dx$, rimarrà questo sol termine pel richiesto differenziale di x^m ; cioè farà $d(x^m) = mx^{m-1} dx$. (*)

(*) Questo differenziale si ritrova ancora senza far uso del binomio nel modo seguente.

Sia l'esponente m un numero intero positivo. La potenza x^m altro non sarà che il prodotto di tante x quante unità sono in m , cioè essa farà il prodotto di altrettante x, y, z, u, \dots ec. tutte eguali tra loro. Onde se m avrà alcuno tra i valori interi positivi 2; 3; 4; 5; ec.

$$\text{Sarà } x^m = x^2 = xy.$$

$$x^m = x^3 = xyz.$$

$$x^m = x^4 = xzyv.$$

ec.

$$\text{Ora (XII) } d(xy) = xdy + ydx.$$

$$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

$$d(xyzv) = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx.$$

Dunque per essere $x = y = z = u = \dots$ ec.

$$\text{Sarà } d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx.$$

$$d(x^3) = x^2 dx + x^2 dx + x^2 dx = 3x^2 dx.$$

$$d(x^4) = x^3 dx + x^3 dx + x^3 dx + x^3 dx = 4x^3 dx.$$

ec.

$$\text{E in generale } d(x^m) = mx^{m-1} dx.$$

Sia m un numero intero negativo espresso generalmente da $-n$.

Posto $x^{-n} = y$, farà $\frac{1}{x^n} = y$, ed $1 = yx^n$; onde differenziando si avrà $0 = x^n dy + nyx^{n-1} dx$, poichè n è numero intero positivo: dun-

XX.

COROLLARIO 1.º Quindi ad avere il differenziale di una variabile inalzata ad una potenza di qualsivoglia esponente negativo, intero, o fratto, si diminuisca questo suo esponente di un unità, cioè si abbassi di un grado la potenza della variabile, e si moltiplichi questa nuova potenza pel primo esponente, e pel differenziale della variabile presa semplicemente.

XXI.

COROLLARIO 2.º Con questa regola si ottengono i seguenti differenziali

$$d(x^m y^n) = y^n d(x^m) + x^m d(y^n) = m y^n x^{m-1} dx + n x^m y^{n-1} dy.$$

que $dy = \frac{-nyx^{n-1} dx}{x^n}$; cioè per essere $y = x^{-n}$, e $dy = d(x^{-n})$, farà $d(x^{-n}) = -nx^{n-1} dx$.

Sia m una frazione positiva espressa generalmente da $\frac{n}{r}$.

Posto $x^{\frac{n}{r}} = y$, farà $x^n = y^r$; ma n ed r sono numeri interi positivi; dunque differenziando avrassi $nx^{n-1} dx = ry^{r-1} dy$, e $dy = \frac{nx^{n-1} dx}{ry^{r-1}}$; cioè per essere $y = x^{\frac{n}{r}}$, $dy = d(x^{\frac{n}{r}})$, ed $y^{r-1} = \frac{x^n}{y}$, farà

$$d(x^{\frac{n}{r}}) = \frac{nx^{\frac{n}{r}-1} dx}{rx^{\frac{n}{r}-1}} = \frac{n}{r} x^{\frac{n}{r}-1} dx.$$

Finalmente sia m una frazione negativa espressa da $-\frac{n}{r}$.

Posto $x^{-\frac{n}{r}} = y$ farà $1 = y^r x^n$, onde per essere n, r numeri interi positivi, differenziando si avrà $0 = rx^n y^{r-1} dy + ny^r x^{n-1} dx$, e $dy = -\frac{n}{r} yx^{-1} dx$.

Ma $y = x^{-\frac{n}{r}}$, e $dy = d(x^{-\frac{n}{r}})$. Dunque rimettendo questi valori, si avrà $d(x^{-\frac{n}{r}}) = -\frac{n}{r} x^{-\frac{n}{r}-1} dx$.

$$d\left(\frac{x^m}{y^n}\right) = \frac{y^n d(x^m) - x^m d(y^n)}{y^{2n}} = \frac{m x^{m-1} dx}{y^n} - \frac{n x^m dy}{y^{n+1}}.$$

$$d(x^n + a)^m = m(x^n + a)^{m-1} d(x^n + a) = mn(x^n + a)^{m-1} x^{n-1} dx.$$

$$d\sqrt[n]{(x+a)^m} = d(x+a)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}(x+a)^{\frac{m}{n}-1} d(x+a) \\ = \frac{m}{n}(x+a)^{\frac{m}{n}-1} x^{n-1} dx. (*)$$

(*) Il differenziale della frazione $\frac{x}{y}$, che al problema terzo si è ritrovato col mezzo della divisione, ed alla nota allo stesso problema con una sostituzione, si ottiene anche più facilmente colla presente regola generale: poichè

$$\frac{x}{y} = xy^{-1}, \text{ e } d(xy^{-1}) = y^{-1} dx + x d(y^{-1}) = y^{-1} dx - xy^{-2} dy \\ \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$



CAPO SECONDO.

13

DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI LOGARITMICHE, E CIRCOLARI.

XXII.

LEMMA. Ogni numero può essere rappresentato da $1 + x$, ed il suo logaritmo dalla formola
 $\log.(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{ec.})$,
 in cui A è il modulo del sistema logaritmico.

La prima parte della proposizione è per se manifesta. Per la seconda parte si faccia $(1+x)^m = 1+z$, $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots \text{ec.}$, e $\log.(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \text{ec.}$: le quantità A, B, C , ec. sono a determinarsi col noto metodo de' coefficienti indeterminati. Però si riduca la prima di queste tre equazioni ai logaritmi, facendo $m \log.(1+x) = \log.(1+z)$; si moltiplichi la seconda per m , e si eguagli il prodotto alla terza equazione. Si avrà $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \dots \text{ec.} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \text{ec.}$

In questa equazione si sostituisca il valore di z dedotto dalla prima, cioè $z = (1+x)^m - 1 =$ (riducendo $1+x^m$ in serie) $mx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{ec.}$
 Si avrà $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \dots \text{ec.} =$

$$\left. \begin{aligned} & mAx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} A \\ & \qquad \qquad \qquad m^2 B \end{aligned} \right\} x^2 + \left. \begin{aligned} & + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} A \\ & \qquad \qquad \qquad m^2 \cdot m-1 \quad B \\ & \qquad \qquad \qquad m^3 \quad C \end{aligned} \right\} x^3$$

$$\begin{array}{l}
 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A \\
 \frac{m^2 \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{3} B \\
 \frac{m^3 \cdot \overline{m-1}}{4} B \\
 \frac{3m^3 \cdot \overline{m-1}}{2} C \\
 m^4 D
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \\ B \\ B \\ C \\ D \end{array}} \right\} x^4 + \text{ec.}$$

Il coefficiente di ciascuna potenza di x nel primo membro si supponga eguale al coefficiente della stessa potenza di x nell'altro membro; cioè si formino queste equazioni.

$$mB = \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} A + m^2 B.$$

$$mC = \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{6} A + \frac{m^2 \cdot \overline{m-1}}{3} B + m^3 C.$$

$$\begin{aligned}
 mD = & \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{24} A + \frac{m^2 \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{3} B + \\
 & \frac{m^3 \cdot \overline{m-1}}{4} C + \frac{3m^3 \cdot \overline{m-1}}{2} C + m^4 D.
 \end{aligned}$$

$$mE = \text{ec.}$$

Dalla prima equazione si ha $B = -\frac{1}{2} A$. Questo valore di B sostituito nella seconda dà $C = \frac{1}{6} A$. I valori di B, C posti nell'equazione seguente, danno quello di $D = -\frac{1}{24} A$. Continuando a sostituire i valori trovati nelle altre equazioni si trova $E = \frac{1}{120} A, F = -\frac{1}{720} A, \dots$ ec.

Finalmente sostituendo questi valori alle stesse quantità B, C, D , ec. nella seconda equazione $\log. (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.}$, si avrà $\log. (1+x) = Ax - \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{6} Ax^3 - \frac{1}{24} Ax^4 + \frac{1}{120} Ax^5 - \frac{1}{720} Ax^6 + \dots$ ec. = $A(x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{120} x^5 - \dots \text{ec.})$

XXIII.

PROBLEMA 1.° Cercare il differenziale di una quantità logaritmica y .

Si faccia $\log. y = z$, e si supponga che y , z diventino $y + dy$, $z + dz$. Sarà $\log. (y + dy) = z + dz$; onde $dz = \log. (y + dy) - z = \log. (y + dy) - \log. y = \log. \left(\frac{y + dy}{y} \right) = \log. \left(1 + \frac{dy}{y} \right)$. Dunque pel lemma precedente, scrivendo $\frac{dy}{y}$ invece di x , si avrà $\log. \left(1 + \frac{dy}{y} \right)$ ossia $dz = A \left(\frac{dy}{y} - \frac{dy^2}{2y^2} + \frac{dy^3}{3y^3} - \dots \text{ec.} \right) =$ (omessi tutti i termini infinitesimi di ordine superiore) $\frac{A dy}{y}$. Cioè $d(\log. y) = \frac{A dy}{y}$, ovvero, se il logaritmo di y s' intenderà iperbolico, in cui $A = 1$, farà $d(\log. y) = \frac{dy}{y}$.

XXIV.

COROLLARIO 1.° Quindi il differenziale del logaritmo di una quantità variabile si trova dividendo il differenziale della quantità per la quantità stessa, e moltiplicando il quoziente pel modulo del dato logaritmo.

XXV.

COROLLARIO 2.° Col mezzo di questa regola si hanno questi differenziali, supponendo i logaritmi iperbolici.

$$d(l. ax) = \frac{adx}{ax} = \frac{dx}{x}; \text{ ovvero, per essere } l. ax = l. a + l. x, \text{ farà } d(l. ax) = d(l. a + l. x) = \frac{dx}{x}.$$

$$d(l. xy) = \frac{ydx + xdy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}, \text{ ovvero } d(l. xy) = d(l. x + l. y) \\ = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{ydx + xdy}{xy}.$$

$$d\left(l. \frac{x}{y}\right) = d(l. x - l. y) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy}.$$

$$d(l. x^m) = \frac{mx^{m-1}dx}{x^m} = \frac{mdx}{x} \text{ ovvero } d(l. x^m) = d(m l. x) \\ = \frac{mdx}{x}.$$

$$d(l. x^m)^n = d(m l. x)^n = n(m l. x)^{n-1} \frac{mdx}{x} = mn(l. x^m)^{n-1} \frac{dx}{x}.$$

$$d\left(l. \frac{a+x}{a-x}\right) = d\left(l. \frac{a+x}{a+x} - l. \frac{a-x}{a-x}\right) = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x} = \frac{2adx}{a^2 - x^2}.$$

$$d\left(l. \sqrt{\frac{x}{x^2 + b^2}}\right) = d(l. x - l. \sqrt{x^2 + b^2}) = \frac{dx}{x} - \frac{x dx (x^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{dx}{x} - \frac{x dx}{x^2 + b^2} = \frac{b^2 dx}{x^2 + b^2 x}.$$

XXVI.

COROLLARIO 3.º La medesima regola serve a determinare il differenziale di un logaritmo di logaritmo, cioè delle quantità $l. l. x$; $l. l. l. x$; $l. l. l. l. x$; ec. in cui ciascuna $l.$ significa logaritmo. Imperocchè, posto $l. x = y$; e però $dy = \frac{dx}{x}$, si avrà

$$d(l. l. x) = d(l. y) = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x l. x}.$$

$$d(l. l. l. x) = d(l. l. y) = \frac{dy}{y l. y} = \frac{dx}{x l. x l. l. x}.$$

$$d(l. l. l. l. x) = d(l. l. l. y) = \frac{dy}{y l. y l. l. y} = \frac{dx}{x l. x l. l. x l. l. l. x}.$$

e in generale $d(1.^m x) = \frac{dx}{x \cdot 1. x \cdot 1.^2 x \cdot 1.^3 x \dots 1.^{m-1} x}$, indicando per $1.^1, 1.^2, \dots, 1.^m$ il logaritmo di $2.^o$, di $3.^o$ di $m.^{esmo}$ ordine.

XXVII.

COROLLARIO 4.^o Dall' equazione $d(\log. x) = \frac{dx}{x}$ si ha $x d(\log. x) = dx$. Dunque il differenziale di una quantità qualunque variabile è eguale alla quantità stessa moltiplicata pel differenziale del suo logaritmo.

Con questa sola regola si possono determinare tutti i differenziali ritrovati nel capo precedente con altrettanti metodi particolari: poichè

$$1.^o d(xy) = xy d(1. xy) = xy \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) = ydx + xdy.$$

$$2.^o d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} d\left(1. \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right) = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

$$3.^o d(x^m) = x^m d(1. x^m) = x^m d(m. 1. x) = x^m \left(\frac{mdx}{x} \right) = mx^{m-1} dx.$$

XXVIII.

PROBLEMA 2.^o Cercare il differenziale di una quantità esponenziale, cioè di una potenza il cui esponente sia variabile.

Sia primieramente a^x . Si faccia $a^x = y$; farà $n. l. a = 1. y$; $d(a^x) = dy$, $l. adn \frac{dy}{y}$; onde $dy = y l. adn$; cioè sostituendo i valori di y e dy , farà $d(a^x) = a^x l. adn$.

Sia x . Posto $x' = z$; farà $y \text{ l. } x = \text{l. } z$, $d(x') = dz$,
 $d(y \text{ l. } x) = \text{l. } x dy + \frac{y dx}{x} = \frac{dz}{z}$, onde $dz = z \left(\text{l. } x dy + \frac{y dx}{x} \right)$,
cioè $d(x') = x' \left(\text{l. } x dy + \frac{y dx}{x} \right) = x' \text{ l. } x dy + y x'^{-1} dx$.

Sia la quantità esponenziale di secondo ordine $a^{x'}$.
Posto $a^{x'} = z$, farà $d(a^{x'}) = dz$, $x' \text{ l. } a = \text{l. } z$, $\frac{dz}{z} =$
 $\text{l. } a d(x') = (\text{caso precedente}) \text{ l. } a (x' \text{ l. } x dy + y x'^{-1} dx)$, e dz
 $= z \text{ l. } a (x' \text{ l. } x dy + y x'^{-1} dx) = a^{x'} \text{ l. } a (x' \text{ l. } x dy + y x'^{-1} dx)$.

Allo stesso modo si trova che il differenziale di $x^{y'}$ è
 $x^{y'} (y' x^{-1} dx + y' \text{ l. } y \text{ l. } x dz + z y'^{-1} \text{ l. } x dy)$; poichè fatto
 $x^{y'} = v$, si avrà $d(x^{y'}) = dv$; $\text{l. } v = y' \text{ l. } x$; $\frac{dv}{v} = d(y' \text{ l. } x)$
 $= y' d(\text{l. } x) + \text{l. } x d(y') = \frac{y' dx}{x} + \text{l. } x (y' \text{ l. } y dz + z y'^{-1} dy)$;
onde moltiplicando per v , e rimettendo per v , e dv i loro
valori farà dv , ossia $d(x^{y'}) = x^{y'} (y' x^{-1} dx + y' \text{ l. } y \text{ l. } x dz + z y'^{-1} \text{ l. } x dy)$.

Da questi differenziali si vede che quì pure ha luogo
la regola stabilita nell'ultimo corollario del problema pre-
cedente; cioè che il differenziale di ogni quantità o funzione
composta comunque o di sole variabili, o di variabili e costan-
ti è sempre eguale al prodotto della stessa quantità o fun-
zione nel differenziale del suo logaritmo.

XXIX.

PROBLEMA 3.º *Determinare il differenziale di una fun-
zione circolare corrispondente ad un dato arco od angolo va-
riabile x .*

Si sostituisca $x + dx$ in luogo di x . Si avrà

1.º Pel differenziale del Seno

Sen. $(x + dx) = \text{Sen. } x \cdot \text{Cof. } dx + \text{Cof. } x \cdot \text{Sen. } dx$, supposto il raggio $= 1$ (*). Ma supponendo $\text{Cof. } dx = \text{Raggio} = 1$, e $\text{Sen. } dx = dx$; cioè il coseno di un arco infinitamente piccolo eguale al raggio, ed il di lui seno eguale all' arco stesso (**), si avrà $\text{Sen. } (x + dx) = \text{Sen. } x + \text{Cof. } x \cdot dx$. Laonde crescendo l' arco x della porzione infinitesima dx , il di lui seno cresce della quantità $\text{Cof. } x \cdot dx$. Dunque $\text{Cof. } x \cdot dx$ farà il differenziale del seno dell' arco x : Cioè *il differenziale del seno di un arco circolare, il cui raggio si suppone $= 1$, è eguale al differenziale dell' arco moltiplicato pel coseno dell' arco stesso.*

2.° Pel differenziale del Coseno

$\text{Cof. } (x + dx) = \text{Cof. } x \cdot \text{Cof. } dx - \text{Sen. } x \cdot \text{Sen. } dx$, fatto il raggio $= 1$; supponendo come sopra $\text{Cof. } dx = \text{Rag.} = 1$ e $\text{Sen. } dx = dx$, si avrà $\text{Cof. } (x + dx) = \text{Cof. } x - \text{Sen. } x \cdot dx$.

(*) Questa e le altre formole che verrò esponendo intorno alle funzioni circolari si trovano in ogni compendio di trigonometria piana. Siano a, b due archi di circolo, il cui raggio si suppone $= 1$:

Il seno della loro somma farà $\text{Sen. } a \cdot \text{Cof. } b + \text{Cof. } a \cdot \text{Sen. } b$.

Quello della loro differenza $\text{Sen. } a \cdot \text{Cof. } b - \text{Cof. } a \cdot \text{Sen. } b$.

Il coseno della somma de' med. archi. $\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b - \text{Sen. } a \cdot \text{Sen. } b$.

Quello della Differenza $\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b + \text{Sen. } a \cdot \text{Sen. } b$.

La tangente dell' arco a farà $= \frac{\text{Sen. } a}{\text{Cof. } a}$; poichè $\text{Cof. } a : 1 :: \text{Sen. } a : \text{Tang. } a$.

La Cotangente di a farà $= \frac{\text{Cof. } a}{\text{Sen. } a}$; poichè $\text{Sen. } a : \text{Cof. } a :: 1 : \text{Cot. } a$.

La Secante $= \frac{1}{\text{Cof. } a}$, e la Cosecante $= \frac{1}{\text{Sen. } a}$; poichè $\text{Cof. } a : 1 :: 1 : \text{Sec. } a$,

e $\text{Sen. } a : 1 :: 1 : \text{Cosec. } a$ ec.

(**) Il coseno di un arco zero è eguale al raggio: dunque il coseno di un arco infinitesimo può supporli eguale al raggio. I seni degli archi piccolissimi si confondono cogli stessi archi: Dunque ai seni degli archi infinitesimi si possono sostituire gli archi stessi, e viceversa.

Onde crescendo l' arco x della porzione infinitesima dx , il di lui coseno decrese della quantità $\text{Sen. } x \cdot dx$. Dunque

— $\text{Sen. } x \cdot dx$, farà la flussione del coseno del medesimo arco : cioè il differenziale del coseno di un arco è eguale al differenziale dell' arco moltiplicato pel seno dell' arco stesso.

3.° Pel differenziale della Tangente, poste sempre il raggio $= 1$, si ha $\text{Tang. } x = \frac{\text{Sen. } x}{\text{Cos. } x}$. Dunque $d(\text{Tang. } x)$

$$= d\left(\frac{\text{Sen. } x}{\text{Cos. } x}\right) = \frac{\text{Cos. } x \cdot d(\text{Sen. } x) - \text{Sen. } x \cdot d(\text{Cos. } x)}{\text{Cos.}^2 x}$$

$$\frac{\text{Cos.}^2 x \cdot dx + \text{Sen.}^2 x \cdot dx}{\text{Cos.}^2 x} = \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x} (\text{Cos.}^2 x + \text{Sen.}^2 x). \text{ Ma}$$

$$\text{Cos.}^2 x + \text{Sen.}^2 x = (\text{Rag.})^2 = 1. \text{ Dunque } d(\text{Tang. } x) = \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x} :$$

cioè il differenziale della Tangente di un arco circolare è eguale al differenziale dell' arco diviso pel quadrato del coseno dell' arco stesso.

4.° Pel differenziale della Cotangente si ha $\text{Cotang. } x$

$$= \frac{\text{Cos. } x}{\text{Sen. } x}. \text{ Dunque } d(\text{Cotang. } x) = d\left(\frac{\text{Cos. } x}{\text{Sen. } x}\right) =$$

$$\frac{\text{Sen. } x \cdot d(\text{Cos. } x) - \text{Cos. } x \cdot d(\text{Sen. } x)}{\text{Sen.}^2 x} = \frac{-\text{Sen.}^2 x \cdot dx - \text{Cos.}^2 x \cdot dx}{\text{Sen.}^2 x}$$

$$= -\frac{dx}{\text{Sen.}^2 x} (\text{Sen.}^2 x + \text{Cos.}^2 x) = -\frac{dx}{\text{Sen.}^2 x} : \text{cioè il differenziale della Cotangente di un arco è eguale al differenziale negativo dell' arco diviso pel quadrato del seno dell' arco stesso.}$$

5.° Pel differenziale della Secante si ha $\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x}$.

$$\text{Dunque } d(\text{Sec. } x) = d\left(\frac{1}{\text{Cos. } x}\right) = \frac{-d(\text{Cos. } x)}{\text{Cos.}^2 x} = \frac{\text{Sen. } x \cdot dx}{\text{Cos.}^2 x} :$$

cioè il differenziale della Secante di un arco è eguale al prodotto del differenziale dell' arco nel seno dell' arco stesso, diviso pel quadrato del coseno.

6.° Pel differenziale della Cofecante, si ha Cofec. x
 $= \frac{1}{\text{Sen. } x}$. Dunque $d(\text{Cofec. } x) = \left(\frac{1}{\text{Sen. } x} \right) = - \frac{d \text{ Sen. } x}{\text{Sen.}^2 x}$
 $= - \frac{\text{Cof. } x \cdot dx}{\text{Sen.}^2 x}$: cioè il differenziale della Cofecante di un
 arco è eguale al prodotto negativo del differenziale dell' arco
 nel coseno dello stesso arco, diviso pel quadrato del seno.

XXX.

COROLLARIO 1.° Dal differenziale di ciascuna delle precedenti funzioni, è facile il passare a quello dell' arco x . Non si ha che a svolgere la dx da quel differenziale: così si avrà 1.° $dx = \frac{d(\text{Sen. } x)}{\text{Cof. } x}$.

$$2.° dx = - \frac{d(\text{Cof. } x)}{\text{Sen. } x}.$$

$$3.° dx = \text{Cof.}^2 x \cdot d(\text{Tang. } x).$$

$$4.° dx = - \text{Sen.}^2 x \cdot d(\text{Cotang. } x).$$

$$5.° dx = \frac{\text{Cof.}^2 x \cdot d(\text{Sec. } x)}{\text{Sen. } x}.$$

$$6.° dx = - \frac{\text{Sen.}^2 x \cdot d(\text{Cofec. } x)}{\text{Cof. } x}.$$

XXXI.

COROLLARIO 2.° Poste tutte queste formole differenziali. Sia y una funzione qualunque dell' arco circolare x ; cioè

1.° Sia y il seno dell' arco x .

Sarà $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$; poichè, fatto il raggio eguale all'unità,

farà $\text{Cof. } x = \sqrt{1 - \text{Sen.}^2 x}$, e sostituiti i valori nella prima formola del corollario precedente $dx = \frac{d \text{ Sen. } x}{\text{Cof. } x}$,

avraffi la trasformata $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

2.° Sia y il Coseno dell' arco x ; per la seconda formola dello stesso corollario si avrà $dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$;

poichè $\text{Sen. } x = \sqrt{1 - \text{Cos.}^2 x}$.

3.° Sia y la tangente. Per la terza formola si avrà $dx = \frac{dy}{1+y^2}$; poichè $\text{Cos. } x = \frac{1}{\text{Sec. } x} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2 x}}$.

4.° Sia y la Cotangente. Per la quarta formola si avrà $dx = -\frac{dy}{1+y^2}$; poichè $\text{Sen. } x = \frac{1}{\text{Cofec. } x} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Cot.}^2 x}}$.

5.° Sia y la Secante. Per la quinta formola si avrà $dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$; poichè $\sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1} = \text{Tang. } x = \text{Sec. } x \cdot \text{Sen. } x$, e $\text{Cos. } x = \frac{1}{\text{Sec. } x}$; onde $\text{Sen. } x = \frac{\sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1}}{\text{Sec. } x}$,

$\text{Cos.}^2 x = \frac{1}{\text{Sec.}^2 x}$, e $\frac{\text{Cos.}^2 x}{\text{Sen. } x} = \frac{1}{\text{Sec. } x \cdot \sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1}}$.

6.° Sia finalmente y la Cofecante. Per l'ultima formola dello stesso corollario si avrà $dx = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2-1}}$; poichè

$\sqrt{\text{Cofec.}^2 x - 1} = \text{Cotang. } x = \text{Cofec. } x \cdot \text{Cos. } x$, e $\text{Sen. } x = \frac{1}{\text{Cofec. } x}$; onde $\text{Cos. } x = \frac{\sqrt{\text{Cofec.}^2 x - 1}}{\text{Cofec. } x}$, $\text{Sen.}^2 x = \frac{1}{\text{Cofec.}^2 x}$,

e $\frac{\text{Sen.}^2 x}{\text{Cos. } x} = \frac{1}{\text{Cofec. } x \cdot \sqrt{\text{Cofec.}^2 x - 1}}$.

CAPO TERZO.

DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE.

XXXII.

I Differenziali di ordine superiore si prendono come i differenziali di 1.^o

Sia X una funzione di x , ed $X'dx$ il suo differenziale di primo ordine, in cui X' è ancora una funzione di x .

Si differenzj $X'dx$ riguardandolo come il prodotto delle due variabili X' , dx . Sarà $d(X'dx) = dx dX' + X' ddx$; e supponendo che il differenziale di X' sia $X''dx$, in cui X'' esprime una nuova funzione di x , farà $d(X'dx) = X''dx^2 + X' ddx$ il 2.^o differenziale di X .

Si differenzj quest' ultimo differenziale riguardando i due termini $X''dx^2$, e $X' ddx$ come due prodotti delle quattro variabili X'' , dx^2 , X' , ddx .

$$\text{Sarà } d(X''dx^2) = dx^2 dX'' + 2X'' dx ddx,$$

$$\text{e } d(X' ddx) = X' dddx + X'' d'x.$$

Onde supponendo $dX'' = X'''dx$ si avrà $X'''dx^3 + 3X''dx ddx + X' d'x$ pel differenziale di 3.^o ordine della funzione finita X .

Continuando ad operare nella stessa guisa avrassi il differenziale di 4.^o, di 5.^o, ec. ordine.

XXXIII.

COROLLARIO. *Quindi ad avere un differenziale di ordine superiore di una data funzione.*

1.^o *Si prenda il differenziale di primo ordine della data funzione.*

2.° Si prenda il differenziale di questa prima funzione considerando come altrettante variabili, e le variabili stesse, ed i loro differenziali: con che si avrà il differenziale di 2.° ordine della data funzione.

3.° Si differenzj questa seconda funzione, supponendo variabili le variabili stesse, i differenziali loro di 1.° ordine, e quelli di 2.°: ciò fatto, l'ottenuto differenziale sarà di 3.° ordine.

Similmente operando si troveranno i differenziali di 4.°, 5.°, ec. ordine.

Esempio 1.° si cerchi il differenziale di secondo ordine di $x - y + a$.

Differenziando questa funzione si ha $dx - dy$,
e differenziando questa prima differenza si ha $ddx - ddy$;
dunque sarà $dd(x - y + a) = ddx - ddy$.

Esempio 2.° Vogliasi la seconda differenza di xy .

Si ha Differenza prima $d(xy) = xdy + ydx$.

Differenza seconda $d(xdy + ydx) = d(xdy) + d(ydx)$.

$$\text{Ma } d(xdy) = xddy + dx dy,$$

$$d(ydx) = yddx + dx dy.$$

$$\text{Dunque } dd(xy) = xddy + yddx + 2dx dy.$$

Esempio 3.° Sia proposto $dd(xyz)$.

Differenza prima $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

Differenza seconda $d(xyz) = d(xydz) + d(xzdy) + d(yzdx)$.

$$\text{Ma } d(xydz) = xyddz + xdzdy + ydzdx,$$

$$d(xzdy) = xzddy + xdzdy + zdydx,$$

$$d(yzdx) = yzddx + ydzdx + zdydx.$$

$$\text{Dunque } dd(xyz) = xyddz + xzddy + yzddx + 2xdzdy + 2ydzdx + 2zdydx.$$

Esem-

Esempio 4.° Sia $dd\left(\frac{x}{y}\right)$.

Differenza 1.° $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Differenza 2.° $d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = d\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) = d\left(\frac{dx}{y}\right) - d\left(\frac{xdy}{y^2}\right)$.

Ma $d\left(\frac{dx}{y}\right) = \frac{yddx - dx dy}{y^2}$,

$$d\left(\frac{xdy}{y^2}\right) = \frac{y^2 xddy + y^2 dx dy - 2xydy^2}{y^4}$$

$$= \frac{yxddy + ydx dy - 2xy^2}{y^3}$$

Dunque $dd\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yddx - dx dy}{y^2} - \frac{yxddy + ydx dy - 2xy^2}{y^3}$

$$= \frac{y^2 ddx - 2ydx dy + 2xy^2 - yxddy}{y^3}$$

Esempio 5.° Sia $dd(x^m)$.

Differenza 1.° $d(x^m) = mx^{m-1} dx$.

Differenza 2.° $d(mx^{m-1} dx) = mx^{m-1} ddx + m \cdot \overline{m-1} x^{m-2} dx^2$.

Cioè $dd(x^m) = mx^{m-1} ddx + m \cdot \overline{m-1} x^{m-2} dx^2$.

Se l'esponente m avesse qualunque valore, per esempio $m = \frac{n}{r}$, ponendo $\frac{n}{r}$ in luogo di m , avremmo

$$dd\left(x^{\frac{n}{r}}\right), \text{ ossia } dd \sqrt[r]{x^n} = \frac{n}{r} x^{\frac{n}{r}-1} ddx +$$

$$\left(\frac{n}{r} - 1\right) \frac{n}{r} x^{\frac{n}{r}-2} dx^2.$$

Esempio 6.° Sia ancora proposto $dd(a^x)$.

Differenza 1.° $d(a^x) = (\text{XXVIII.}) a^x \text{ l. } adx$.

Differenza 2.^a $d(a \cdot l. adx) = a' d(l. adx) + l. adx d(a')$.

Ma $a' d(l. adx) = a' l. addx$,

$$l. adx d(a') = a' (l. a)' dx^2.$$

Dunque $dd(a') = a' l. addx + a' (l. a)' dx^2$.

Esempio 7.^o Vogliasi finalmente la terza differenza di xy

Sarà (Esempio 2.^o) $dd(xy) = xddy + yddx + 2dx dy$.

E però differenza 3.^a $d(xddy + yddx + 2dx dy) = d(xddy) + d(yddx) + d(2dx dy)$.

Ora $d(xddy) = x d'y + ddy dx$,

$$d(yddx) = y d'x + ddx dy,$$

$$d(2dx dy) = 2dx dy + 2ddx dy.$$

Dunque $d'(xy) = x d'y + ddy dx + y d'x + ddx dy + 2dx dy + 2ddx dy$.

XXXIV.

E' superfluo l' addurre altri esempj: i metodi generali che abbiamo insegnati bastano a determinare i differenziali di ciascun ordine per ogni funzione comunque composta di quantità algebriche e trascendenti. Soltanto si avverta che se si passando dalle prime alle superiori differenze, si prenderà per costante qualche differenza di 1.^o ordine, le formole differenziali ricercate, faranno e più facili a determinarsi, e più semplici dell' ordinario. Si vogliano per esempio tutti i differenziali di x^m col supporre costante la differenza dx .

Sarà $d x^m = m x^{m-1} dx$.

$$d^2 x^m = d(m x^{m-1} dx) = m \cdot m-1 x^{m-2} dx^2; \text{ poichè } ddx = 0.$$

$$d^3 x^m = d(m \cdot m-1 x^{m-2} dx^2) = m \cdot m-1 \cdot m-2 x^{m-3} dx^3.$$

$$d^4 x^m = m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 x^{m-4} dx^4.$$

E in generale $d^n x^m = m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots (m-n+1) x^{m-n} dx^n$.

CAPO QUARTO.

27

USO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE NELLA FORMAZIONE DELLE SERIE.

Sia x una variabile, ed y una qualunque sua funzione. Per un numero indeterminato di volte si accresca ciascuna di queste due quantità del suo rispettivo differenziale, riguardando sempre come costante l'infinitesima dx , e si prendano i diversi stati di y per funzioni degli corrispondenti di x ; cioè ai valori $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, ec. si facciano corrispondere ordinatamente le funzioni disposte nella tavola seguente.

Valori assunti.	Funzioni corrispondenti.
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + d^3y$
$x + 4dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + d^4y$
ec.	

Dall' andamento di queste funzioni si vede chiaro, che tolto il 1.° termine y in ciascuna delle medesime, i coefficienti numerici di dy ne' secondi termini sono i numeri in serie naturale 0, 1, 3, 4, . . . ec., e che chiamando n ciascuno di questi numeri i coefficienti de' termini in ciascuna di queste funzioni sono secondo questa legge

$$n, \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ ec. } (*)$$

(*) Questi Coefficienti sono quegli stessi del Binomio Neutonian.

Dunque in generale la funzione corrispondente al valore

$$x + ndx \text{ farà } y + ndy + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} ddy + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 y + \\ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 y + \text{ec.}$$

Si chiami x quest' ultima funzione di $x + ndx$, e si affuma n infinita. I numeri finiti negativi -1 , -2 , -3 , -4 , ec. potranno trascurarsi in confronto di n , cioè a ciascun numero $n-1$, $n-2$, $n-3$, ec. potrà sostituirsi n , ed alla generale funzione di $x + ndx$ la trasformata $x = y + ndy + \frac{n^2 ddy}{1 \cdot 2} + \frac{n^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$, in cui ciascun termine, oltre l' y , per essere il prodotto di due quantità l'una infinita, e l'altra infinitamente piccola dello stesso ordine, farà quantità finita (*).

Facciasi in oltre la quantità finita $ndx = \varphi$, farà $x + ndx = x + \varphi$, ed $n = \frac{\varphi}{dx}$. Questo valore di n sostituito nella trasformata equazione darà la nuova formola generale $x = y + \frac{\varphi dy}{dx} + \frac{\varphi^2 ddy}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{\varphi^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{ec.}$

(*) Siccome n è quantità infinita farà $n = \infty$; ma dy è una quantità infinitamente piccola, quale può riguardarsi come il quoto di una quantità finita qualunque h divisa per un infinita ∞ : dunque farà $dy = \frac{h}{\infty}$, $dy^2 = \frac{h^2}{\infty^2}$, $dy^3 = \frac{h^3}{\infty^3}$ ec., e quindi sostituendo avrassi $ndy = \infty \cdot \frac{h}{\infty} = h$, $n^2 dy^2 = \infty^2 \cdot \frac{h^2}{\infty^2} = h^2$, $\infty^3 \cdot \frac{h^3}{\infty^3} = h^3$ ec. Cioè il prodotto di due quantità l'una infinita, e l'altra infinitamente piccola dello stesso ordine, farà quantità finita.

i cui termini faranno tutti finiti. (*) L'uso generale di questa formola nella formazione delle serie è indicato ne' seguenti problemi.

XXXVI.

PROBLEMA I.° *Ridurre in serie infinita la potenza*

$(x + \phi)^m$.

Si faccia $(x + \phi)^m = z$; farà $y = x^m$: poichè, essendo y funzione di x , e z una simile funzione di $x + \phi$, non può supporfi $z = (x + \phi)^m$, quando non si faccia ancora $y = x^m$.

Posto adunque costante la dx e differenziando continuamente l'equazione $y = x^m$ si avrà

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m \cdot \overline{m-1} x^{m-2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} x^{m-3}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} x^{m-4}.$$

ec.

Questi valori sostituiti nella formola generale daranno

$$\begin{aligned} \text{la serie infinita } (x + \phi)^m = & x + \frac{m}{1} x^{m-1} \phi + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} x^{m-2} \phi^2 \\ & + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} \phi^3 + \text{ec.}, (**) \text{ cioè la notissima espres-} \end{aligned}$$

(*) Due quantità infinitesime dello stesso ordine devono avere tra loro un rapporto finito: Dunque dividendo l'una per l'altra avrassi un quoto che farà quantità finita.

(**) Questa serie si può ancora ritrovare senza l'ajuto dell'usata formola generale nel modo seguente.

sione del binomio Neutoniano, di cui ciascuno fa l'uso nel-

Cercò primieramente la potenza m del binomio $1 + x$, e perciò suppongo $(1 + x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.}$: metto 1 al principio della serie perchè qualunque potenza di $1 + x$ ha 1 per primo termine. Differenzio questa equazione ed ho $m(1 + x)^{m-1}dx = Adx + 2Bxdx + 3Cx^2dx + 4Dx^3dx + \text{ec.}$, ovvero, dividendo pel comun fattore dx , $m(1 + x)^{m-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec.}$ (M) Quest'equazione deve aver sempre luogo qualunque sia il valore di x . Riguardo adunque la x come quantità infinitamente piccola, ed ometto nella stessa equazione tutti i termini in cui entra la x , perchè in questa ipotesi svaniscono in confronto degli altri termini finiti. Così io ho l'equazione semplicissima $m(1)^{m-1} = A$, dalla quale ricavo $A = m$.

Differenzio di nuovo l'equazione (M) ed ho $m(m-1)(1+x)^{m-2}dx = 2Bdx + 6Cxdx + 12Dx^2dx + \text{ec.}$, ossia dividendo per dx , $m(m-1)(1+x)^{m-2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + \text{ec.}$, e riguardando ancora la x come infinitamente piccola, cioè togliendo da quest'ultima equazione ogni termine in cui entra x ho $m(m-1) = 2B$, e quindi $B = \frac{m(m-1)}{2}$.

Continuando nell'istessa maniera trovo $C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

$$D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ ec.}$$

Metto adunque questi valori nella supposta serie ed ho $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \text{ec.}$

Faccio $(x + \Phi)^m = x^m \left(1 + \frac{\Phi}{x}\right)^m$, e scrivendo $\frac{\Phi}{x}$ in luogo di x ottengo $\left(1 + \frac{\Phi}{x}\right)^m = 1 + m \frac{\Phi}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{\Phi^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Phi^3}{x^3} + \text{ec.}$, e finalmente moltiplicando ciascun membro per x^m ho la cercata potenza $x^m \left(1 + \frac{\Phi}{x}\right)^m$, ossia $(x + \Phi)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} \Phi + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Phi^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} \Phi^3 + \text{ec.}$

la formazione delle potenze, nella estrazione delle radici, nell'evoluzione in serie infinite delle frazioni, e le varie trasformazioni in altre serie più comode e convergenti.

XXXVII.

PROBLEMA 2.^o Ridurre in serie il logaritmo $\text{l.}(x \pm \phi)$.
Facciasi $\text{l.}(n + \phi) = z$, farà $y = \text{l. } n$, ovvero $y = A \text{ l. } n$.
(XXII.)

Onde differenziando $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{x}$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{A}{x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{A}{x^3}$; ec. e sostituendo questi valori nella formola generale,

avràssi $\text{l.}(n + \phi) = \text{l. } n + A \left(\frac{\phi}{x} - \frac{\phi^2}{2x^2} + \frac{\phi^3}{3x^3} - \frac{\phi^4}{4x^4} + \text{ec.} \right)$
serie che convergerà tanto più presto, quanto più piccolo farà il valore di ϕ rispetto ad n .

Similmente pel segno negativo si troverà $\text{l.}(n - \phi)$
 $= \text{l. } n - A \left(\frac{\phi}{x} + \frac{\phi^2}{2x^2} + \frac{\phi^3}{3x^3} + \frac{\phi^4}{4x^4} + \text{ec.} \right)$, serie che
sottratta dalla precedente darà $\text{l.}(n + \phi) = \text{l.}(n - \phi) +$
 $2A \left(\frac{\phi}{x} + \frac{\phi^3}{3x^3} + \frac{\phi^5}{5x^5} + \frac{\phi^7}{7x^7} + \text{ec.} \right)$, cioè $\text{l.} \left(\frac{n + \phi}{n - \phi} \right)$
 $= 2A \left(\frac{\phi}{x} + \frac{\phi^3}{3x^3} + \frac{\phi^5}{5x^5} + \frac{\phi^7}{7x^7} + \text{ec.} \right)$.

In oltre se in ciascuna di queste serie si farà $\phi = 1$,
si avranno le trasformate.

$$\text{l.}(x + 1) = \text{l. } x + A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{ec.} \right)$$

$$\text{l.}(x - 1) = \text{l. } x - A \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{ec.} \right)$$

$$l.(x+1) = l.(x-1) + 2A \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{ec.} \right)$$

$$l.\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2A \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{ec.} \right).$$

XXXVIII.

COROLLARIO 1.° Col mezzo di queste serie si possono calcolare tutti i logaritmi di qualunque sistema: poichè dato il logaritmo di x dalla prima formola si avrà quello di $x+1$, dalla seconda quello di $x-1$, e supposto il logaritmo di $x-1$, dalla terza si avrà quello di $x+1$, e viceversa. Finalmente colla quarta formola senza supporre verun logaritmo, potrà ritrovarsi quello di una frazione qualunque $\frac{x+1}{x-1}$, il cui numeratore sia maggiore del suo denominatore di due unità, e questa formola basterà da se sola per calcolare ogni logaritmo.

Per dare qualche saggio della pratica di questi calcoli, si cerchi primieramente il logaritmo iperbolico di 2.

Si faccia $\frac{x+1}{x-1} = 2$; farà $x=3$ ed $A=1$, poichè nel sistema iperbolico il modulo di logaritmi è eguale all'unità; e sostituendo questo valore di x nella quarta formola si avrà

$$l.2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \text{ec.} \right)$$

Questi termini ridotti in decimali sono

$$\frac{1}{3} = 0,3333333$$

$$\frac{1}{81} = 0,0123457$$

$$\frac{1}{1215} = 0,0008230$$

$$\frac{1}{15309} = 0,0000653$$

$$\frac{1}{177147} = 0,0000056$$

$$\frac{1}{1948617} = 0,0000005$$

$$\text{Somma. } 0,3465734$$

Tutti gli altri termini della serie sono inutili, perchè ci accontentiamo di 7 cifre decimali. Dunque sarà
 $l.2 = 2(0,3465734) = 0,6931468$.

Conosciuto il logaritmo di 2 si trovano immediatamente tutti quelli delle sue potenze e radici: poichè
 $l.2^m = m l.2$.

$$\text{Quindi } l.4 = l.2^2 = 2 l.2 = 1,3862936.$$

$$l.8 = l.2^3 = 3 l.2 = 2,0794404.$$

$$l.16 = l.2^4 = 4 l.2 = 2,7725872.$$

ec.

Ad avere il logaritmo di 3 si faccia $\frac{x+1}{x-1} = 3$, e per ciò $x=2$: questo valore sostituito nella serie darà

$$l.3 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} + \frac{1}{22528} + \frac{1}{106496} + \frac{1}{491596} + \frac{1}{2228224} + \text{ec.} \right)$$

e per essere $\frac{1}{2} = 0,5000000$

$$\frac{1}{24} = 0,0416666$$

$$\frac{1}{160} = 0,0062500$$

$$\frac{1}{896} = 0,0011162$$

$$\frac{1}{4608} = 0,0002170$$

$$\frac{1}{22528} = 0,0000443$$

$$\frac{1}{106496} = 0,0000093$$

$$\frac{1}{401520} = 0,0000029$$

$$\frac{1}{2228224} = 0,0000004$$

Sarà $l. 3 = 0,5493058 \times 2 = 1,0986116$

Col logaritmo di 3 si trova quello di ciascuna sua potenza e radice, poichè $l. 3^m = m l. 3$; e co' logaritmi di 2 e 3, e delle potenze e radici loro si trovano tutti quegli espressi dalle tre formole generali $l. (2^m \times 3^n)$, $l. \left(\frac{2^m}{3^n}\right)$, $l. \left(\frac{3^n}{2^m}\right)$, in cui m ed n sono numeri qualunque.

Se invece di porre $\frac{x+1}{x-1} = 3$ si farà $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{3}$, supponendo conosciuto il logaritmo di 4, la serie convergerà assai più rapidamente; poichè sarà $n = 7$,

$$\text{e } l. \frac{x+1}{x-1} = l. \frac{4}{3} = 2 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1029} + \frac{1}{84035} + \frac{1}{5764801} + \text{ec.} \right)$$

Quindi $\frac{1}{7} = 0,1428571$

$\frac{1}{1029} = 0,0009718$

$\frac{1}{84035} = 0,0000119$

$\frac{1}{5764801} = 0,0000002$

e l. $\frac{4}{3} = 0,1438410 \times 2 = 0,2876820$.

Ma l. $\frac{4}{3} = l.4 - l.3$. Dunque $l.3 = l.4 - l.\frac{4}{3} = 1,3862936 - 0,2876820 = 1,0986116$.

In generale conosciuto il logaritmo di un numero qualunque $a + 1$ si troverà quello di a con una serie prestissimo convergente col porre $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+1}{a}$.

Cerchisi ancora il logaritmo di 5.

Fatto $\frac{x+1}{x-1} = \frac{6}{5}$; farà $x = 11$, e l. $\frac{6}{5} = 2 \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{3 \cdot 11^3} + \frac{1}{5 \cdot 11^5} + \frac{1}{7 \cdot 11^7} + \text{ec.} \right)$, serie in cui tutti i termini dopo il 3.^o sono inutili; poichè

$\frac{1}{11} = 0,0909090$

$\frac{1}{3 \cdot 11^3} = 0,002504$

$\frac{1}{5 \cdot 11^5} = 0,000012$

$\frac{1}{7 \cdot 11^7} = 0,000000$

Somma $0,0911606$

Dunque l. $\frac{5}{6} = 0,1823212$, e l. 5 = l. 6 - 0,1823212 = 1,7917584 - 0,1823212 = 1,6094372.

E 2

Collo stesso metodo si potranno determinare i logaritmi degli altri numeri primi 7, 11, 13, 17, ec., e col mezzo di questi i logaritmi di tutti i numeri composti. Solo si deve avvertire, che quanto più grandi faranno i numeri di cui si cercheranno i logaritmi, tanto più pochi termini della serie si richiederanno, e che nei numeri maggiori il solo primo termine darà il logaritmo cercato.

XXXIX.

COROLLARIO 2.° Con questi logaritmi iperbolici si trovano facilmente i logaritmi de' medesimi numeri per qualunque altro sistema: giacchè questi altro non sono, come appare dalla formola generale, fuorchè gli stessi logaritmi iperbolici moltiplicati pel modulo A . Nel sistema delle tavole comuni sapiamo che la base logaritmica è 10: si tratta adunque di cercare il valore numerico di A , affine di poter convertire i trovati logaritmi iperbolici in tabulari.

Si prenda la formola generale $L. \left(\frac{x + \phi}{x - \phi} \right) =$

$$2A \left(\frac{\phi}{x} + \frac{\phi^3}{3x^3} + \frac{\phi^5}{5x^5} + \frac{\phi^7}{7x^7} + \text{ec.} \right);$$

in essa si permutino i luoghi rispettivi ad x , e ϕ , cioè si ponga x in luogo di ϕ , e ϕ in luogo di x , e nello stesso tempo si faccia ancora $\phi = 1$, così che la formola resti trasformata in quest' altra $L. \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2A \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ec.} \right)$. In questa si faccia $A = \frac{1}{p}$, e $\frac{1+x}{1-x} = a$;

farà $n = \frac{a-1}{a+1}$, indi sostituendo questi valori si avrà

l. $a = \frac{2}{p} \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^2}{3(a+1)^2} + \frac{(a-1)^3}{5(a+1)^3} + \text{ec.} \right)$. Finalmente posta la base $a = 10$, e l. $a = 1$ si avrà la serie convergente $p = 2 \left(\frac{9}{11} + \frac{9^2}{3 \cdot 11^2} + \frac{9^3}{5 \cdot 11^3} + \frac{9^4}{7 \cdot 11^4} + \text{ec.} \right)$, i cui termini ridotti in decimali e sommati daranno il valore affai prossimo di $p = 2,302584$. Onde farà $A = \frac{1}{2,302584} = 0,4342945$ il modulo richiesto. (*)

Quindi pel sistema delle tavole comuni de' logarithmi farà l. 2 = 0,6931468 \times 0,4342945 = 0,3010300
 l. 3 = 1,0986116 \times 0,4342945 = 0,4771213
 l. 4 = 1,3862936 \times 0,4342945 = 0,6020600
 ec.

XL.

PROBLEMA 3.^o Ridurre in Serie la quantità esponenziale a^x

Pongasi $a^x = y$, ed $a^x + \Phi = z$; farà $\frac{dy}{dx} = a^x \text{ l. } a$, $\frac{d\Phi}{dx} =$

(*) Il valore di A si trova più speditamente in questo modo. Sia a un numero, di cui si conosce il logarithmo iperbolico ed il tabulare; cioè sia

l. $a = b$ il logarithmo iperbolico

A l. $a = c$ il logarithmo tabulare.

Sarà l. $a : A$ l. $a :: b : c$.

Quindi $A = \frac{c \text{ l. } a}{b \text{ l. } a} = \frac{c}{b}$.

Nel sistema delle tavole si conoscono i logarithmi di tutti i numeri in progressione decupla 10; 100; 1000; ec., che sono i numeri in serie naturale 1; 2; 3; ec.; dunque posto $a = 10$, farà $c = A$ l. 10 = 1: ma nel sistema iperbolico si è trovato l. 10 = 2,302584. Dunque si avrà come prima

$$A = \frac{1}{2,302584} = 0,4342945.$$

$a^x (l.a)^x, \frac{d^x y}{dx^x} = a^x (l.a)^x, \text{ ec.},$ e sostituendo si avrà $a^{x+\phi} =$

$a^x \left(1 + \frac{\phi l.a}{1} + \frac{\phi^2 (l.a)^2}{1.2} + \frac{\phi^3 (l.a)^3}{1.2.3} + \text{ec.} \right),$ cioè dividendo per a^x .

$a^\phi = 1 + \frac{\phi l.a}{1} + \frac{\phi^2 (l.a)^2}{1.2} + \frac{\phi^3 (l.a)^3}{1.2.3} + \frac{\phi^4 (l.a)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.},$

e mettendo x in luogo di ϕ , $a^x = 1 + \frac{x l.a}{1} + \frac{x^2 (l.a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (l.a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (l.a)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$

XLI.

COROLLARIO 1.° Allo stesso modo si troverà

$$a^{-x} = 1 - \frac{x l.a}{1} + \frac{x^2 (l.a)^2}{1.2} - \frac{x^3 (l.a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (l.a)^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

XLII.

COROLLARIO 2.° Sia ω la base logaritmica nel sistema iperbolico, farà $\omega^\phi = 1 + \frac{\phi l.\omega}{1} + \frac{\phi^2 (l.\omega)^2}{1.2} + \frac{\phi^3 (l.\omega)^3}{1.2.3} + \frac{\phi^4 (l.\omega)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$ Si faccia $\phi = 1$, e $l.\omega = 1$: poichè il logaritmo della base è sempre l'unità, si avrà la serie convergente $\omega = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{ec.}$ esprimente il valore numerico della stessa base; cioè, riducendo i termini e sommando, $\omega = 2,7182818$, quantità che si può ottenere in diversi altri modi.

XLIII.

PROBLEMA 4.^o Sia y un dato arco di circolo, ed x una qualche sua funzione, determinare la variazione dell' arco y , per una finita variazione ϕ soppraggiunta alla funzione x , e viceversa.

1.^o Sia x Seno di y . Si indichi per A Sen. x l'arco y , e per A Sen. $(x \pm \phi)$ l'arco variato che si cerca; cioè si faccia $y = A$ Sen. x , e $z = A$ Sen. $(x \pm \phi)$.

$$\begin{aligned} \text{Sarà (XXXI. 1.^o) } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{ddy}{dx^2} &= \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}} \\ \frac{d^5y}{dx^5} &= \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}} \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

e sostituendo questi valori nella formola generale, nascerà la seguente serie infinita

$$\begin{aligned} A \text{ Sen. } (x \pm \phi) &= A \text{ Sen. } x \pm \frac{\phi}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\phi^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \pm \\ &\frac{\phi^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\phi^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} \pm \frac{\phi^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{ec., nella} \end{aligned}$$

quale, se ϕ farà una quantità molto piccola, la somma de' 3, o 4 primi termini darà un valore molto prossimo dell' arco cercato.

Si cerchi per esempio l'arco di circolo, il cui seno sia

eguale alla quarta parte del raggio, cioè alla funzione 0,25, supponendo il raggio eguale all'unità.

Dalle tavole de' seni si ha seno prossimo minore al dato - - - - - 0,2498167

Arco y corrispondente a questo seno - - - 14° 28'.

Differenza tra il predetto seno ed il seno dato 0,0001233

$\sqrt{(1-x^2)} = \text{Cof. } y = \text{Cof. } 14^\circ 28' = - - - 0,9682731$

$\text{Sen. } (x+\varphi) = - - - - - 0,2500000$

Sarà dunque $\text{Sen. } (x+\varphi) = 14^\circ 28' + \frac{\varphi}{\text{Cof. } y} + \frac{\varphi^2 \text{ Sen. } y}{2 \text{Cof. }^2 y}$,

la quale espressione basta. Dunque, usando per maggior comodo i logaritmi, si troverà

$$l. \varphi = 6,0909631$$

$$l. \text{Cof. } y = 9,9860069$$

$$l. \frac{\varphi}{\text{Cof. } y} = 6,1049562; \frac{\varphi}{\text{Cof. } y} = 0,0001273374$$

$$l. \frac{\varphi^2}{\text{Cof. }^2 y} = 2,2099124$$

$$l. \text{Sen. } y = 9,3976205$$

$$l. \frac{\text{Sen. } y}{\text{Cof. } y} = 9,4116136$$

$$l. \frac{\varphi^2 \text{ Sen. } y}{\text{Cof. }^2 y} = 1,6215260$$

$$l. 2 = 0,3010300$$

$$l. \frac{\varphi^2 \text{ Sen. } y}{2 \text{Cof. }^2 y} = 1,3240960; \frac{\varphi^2 \text{ Sen. } y}{2 \text{Cof. }^2 y} = 0,000002091$$

$$\text{Somma } 0,0001275465.$$

Per ridurre questa frazione in minuti secondi di grado, si farà come si fa al valore del raggio in secondi, ch'è 206364", così la stessa frazione al 4° termine. Operando ancora co' logaritmi avrassi

Lo-

Logaritmo della frazione 6, 1056670

Complemento logaritmico del Rag.° 4, 6855749

Residuo 1, 4200921

Numero corrispondente a questo residuo logaritmico, ossia valore della frazione in secondi 26", 30863. Dunque l'arco cercato, ridotta la parte decimale in minuti terzi, quarti, ec., farà 14.° 28.1 26." 18." 30." 59." 45." 36."

2.° Sia x Coseno. Posto $y = A \text{ Cos. } x$, e $z =$

$$A \text{ Cos. } (x \pm \phi), \text{ avrassi (XXXI. 2.°) } \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}, \text{ e}$$

la cercata serie, dopo aver cambiato il primo termine, farà la precedente permutati i segni; cioè

$$A \text{ Cos. } (x \pm \phi) = A \text{ Cos. } x \mp \frac{\phi}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\phi^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{\phi^3 (1 \mp 2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\phi^4 (9x \mp 6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} \mp \frac{\phi^5 (9 \mp 72x^2 x \mp 24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} - \text{ec.}$$

3.° Sia x tangente. Posto $y = A \text{ Tang. } x$, e $z = A \text{ Tang. } (x \pm \phi)$, avrassi (XXXI. 3.°).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+xx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{2x}{(1+xx)^2} \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{6xx-2}{(1+xx)^3} \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{-24x^3 + 24x}{(1+xx)^4} \\ \frac{d^5 y}{dx^5} &= \frac{120x^4 - 240x^2 + 24}{(1+xx)^5} \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } A \text{ Tang. } (x \pm \phi) = A \text{ Tang. } x \pm \frac{\phi}{1+xx} -$$

$$\frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} x \pm \frac{\Phi'}{(1+xx)^2} \left(xx - \frac{1}{3} \right) - \frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} (x' - x) \pm$$

$$\frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} \left(x^2 - 2xx + \frac{1}{5} \right) - \text{ec.}$$

4.° Sia x Cotangente; poichè (XXXI. 4.°) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+xx}$,
 permutati i segni ai termini della formola precedente, e
 cambiato il 1.° termine, farà $A \text{ Cot.}(x \pm \varphi) = A \text{ Cot. } x \mp$

$$\frac{\Phi}{1+xx} + \frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} x \mp \frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} \left(xx - \frac{1}{3} \right) +$$

$$\frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} (x' - x) \mp \frac{\Phi^2}{(1+xx)^2} \left(x^2 - 2xx + \frac{1}{5} \right) + \text{ec.}$$

In guisa simile si potrà determinare la variazione dell' arco y per una finita variazione di ciascun'altra sua funzione: e viceversa per una finita variazione sopraggiunta ad y farà facile il determinare quella di ciascuna sua funzione x ; e se le variazioni si prenderanno affai piccole avrassi di più un mezzo per interpolare le tavole de' seni, coseni, tangenti, ec.

Allo stesso modo, e col mezzo della stessa formola generale, si potranno ottenere moltissime altre serie, alle quali le ritrovate finora potranno servire d' esempio.

CAPO QUINTO.

USO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE NELL'APPROSSIMAZIONE
ALLE RADICI REALI DELLE EQUAZIONI
DI GRADO SUPERIORE.

XLIV.

Ogni equazione sì algebrica, che trascendente può essere generalmente rappresentata dalla formola $y = 0$, in cui y è una funzione qualunque di x . Dicesi poi risolta quest'equazione, quando si determini un valore di x , il quale, sostituito in luogo della stessa x , riduca la funzione y eguale a zero.

Sia f questo valore di x , cioè una tra le radici dell'equazione $y = 0$: perciò che si è detto nel capo precedente, se in luogo di x si ponga f , oppure $x + (f - x)$, supponendo la nuova funzione $= 0$, si avrà $f - x = 0$, e $z = 0$, onde $0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{dx^2} + \frac{(f-x)^3 y'}{dx^3} + \text{ec.}$

In questa formola generale f si suppone eguale precisamente ad x , ma nell'inchiesta delle radici delle altre equazioni particolari f non è da principio che un valore prossimo di x , il quale col mezzo della stessa formola generale si riduce in seguito ad un valore molto più esatto. Il metodo è il seguente.

Si supponga f già tanto prossima ad x , che $f - x$ possa riguardarsi come una quantità assai piccola rispetto alla stessa x , ed i termini dell'equazione $0 = y +$

$$\frac{(f-x')dy}{dx} + \frac{(f-x)''ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)'''d^2y}{6dx^3} + \text{ec. prestissimo}$$

convergenti. In quest'equazione si ommettino tutti i termini, in cui $f-x$ si ritrova innalzata a qualche grado di potenza, cioè si consideri la stessa equazione, come se non fosse che $0=y+\frac{(f-x)dy}{dx}$, e da questa si cavi il valore $f=x-\frac{ydx}{dy}$, il quale, sostituito ad x il suo prossimo valore, farà una radice più esata dell'equazione $y=0$.

Se questo valore di f si sostituirà alla stessa x nella medesima formola $f=x-\frac{ydx}{dy}$, si avrà in f una radice ancora più prossima alla vera, e proseguendo in siffatta guisa a sostituire ad x il precedente valore di f accosterassi più e più al valore vero delle stessa radice f . Alcuni esempj rischiareranno meglio questo metodo.

1.° Si debba estrarre la radice n^{esima} da un numero qualunque c .

Sia x la radice vera cercata, a la radice più prossima minore, e b l'eccesso di c sopra a^n , farà $x^n=c=a^n+b$, ossia $x^n-a^n-b=0$, e $b=c-a^n$. Si faccia $x^n-a^n-b=y$; Sarà $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{nx^{n-1}}$.

$$\text{Quindi } f=x-\frac{ydx}{dy}=x-(x^n-a^n-b)\frac{1}{nx^{n-1}}=(\text{posto } a \text{ in luogo di } x) a+\frac{b}{na^{n-1}}=\frac{c}{na^{n-1}}+\frac{n-1 \cdot a}{n}.$$

2.° Sia $c=10$, ed $n=2$, cioè vogliasi estrarre la radice quadrata da 10: farà $a=3$, ed $f=\frac{10}{6}+\frac{3}{2}=3,16666$.

NELL' APPROSSIMAZIONE ALLE RADICI REALI EC. 45

Posto $x = 3,16666$, farà $f = \frac{10}{6,33332} + \frac{3,16666}{2} = 3,16228$, valore già molto prossimo alla radice richiesta; poichè innalzato alla seconda potenza dà $10,00001$.

3.° Dello stesso 10 estrarre la radice cuba.

Fatto $x = 2$, ed $n = 3$, si avrà $f = \frac{10}{12} + \frac{4}{3} = 2,16666$, e posto $x = 2,16666$, si troverà $f = \frac{10}{3(2,16666)^2} + \frac{4,3332}{3} = 2,15493$, radice molto prossima.

4.° Cercare una delle radici dell'equazione $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$.

Posto $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = y$.

ed $x = 1 \dots$ si avrà $y = -4$.

$x = 2 \dots \dots \dots y = -2$.

$x = 3 \dots \dots \dots y = +6$.

Da questi risultati si vede, che una delle radici contiene si tra 2, e 3, cioè che deve essere 2 più una frazione.

Differenziando dunque l'equazione avrassi $\frac{dx}{dy} =$

$\frac{1}{3x^2 - 6x + 4}$, e sostituendo farà $f = x - \frac{y dx}{dy} = x -$

$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 6}{3x^2 - 6x + 4} = (\text{posto 2 in luogo di } x) 2 + \frac{2}{4} = 2,5$.

Pongasi ora $x = 2,5$; farà $f = 2,5 - 0,1129 = 2,3871$ una radice più prossima.

Si sostituiscia di nuovo questo valore 2,3871 ad x , e per maggiore comodità adoperando i logaritmi si troverà

$Lx = 0,3778706$; onde $x = 2,387100$.

$Lx^2 = 0,7557412$; $x^2 = 5,698247$.

$Lx^3 = 1,1336118$; $x^3 = 13,602281$.

$$x' = 13,602281$$

$$3x' + 4 = 21,094741$$

$$4x' = 9,548400$$

$$6x' = 14,322600$$

$$x' + 4x' = 23,150681$$

$$\text{Denominatore } 6,772141$$

$$3x' + 6 = 23,094741$$

$$\text{Numeratore } 0,055940$$

$$\text{Log. Num.} = 8,7477225$$

$$\text{Log. Den.} = 0,8307259$$

$$x = 2,3871000$$

$$\text{Log. Frazione} = 7,9169966 \quad \text{Frazione} = 0,0082603$$

$$\text{Quindi } f = 2,3788397$$

Radice affai prossima.

5.° Cercare una radice prossima dell' Equazione $x' + 5x^2 - 8x - 110 = 0$.

$$\text{Posto } x' + 5x^2 - 8x - 110 = y.$$

$$\text{ed } x = 1 \dots \text{ Sarà } y = -113$$

$$x = 2 \dots \dots y = -90$$

$$x = 3 \dots \dots y = -8$$

$$x = 4 \dots \dots y = +194$$

Dunque la richiesta radice farà 3 più una frazione

$$\text{Ora differenziando l'equazione avrassi } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x' + 10x - 8},$$

$$\text{e sostituendo nella formola farà } f = x - \frac{x' + 5x^2 - 8x - 110}{4x' + 10x - 8};$$

$$\text{Quindi fatto } x = 3, \quad \text{farà } f = 3,0615;$$

$$\text{fatto } x = 3,0615, \text{ farà } f = 3,059893;$$

$$\text{fatto } x = 3,059839, \text{ farà } f = 3,059887;$$

radice molto prossima alla vera.

6.° Cercare una radice dell' equazione $x' + 1.x - 15 = 0 = y$.

Si ha $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x' + Ax^{-1}}$; A è il modulo del logaritmo di x .

Dunque sarà $f = x - \frac{y dx}{dy} = x - \frac{x^2 + 1. x - 15}{4x^2 + Ax^{-1}}$.

Posto $x = 2$, poichè 2 è la radice prossima, ed $A = 0$, 4342945 il modulo de' logaritmi delle tavole, si troverà $f = 2 - \frac{1,30103}{32,21715} = 1,9596$. Posto di nuovo $x = 1,9596$, ed usando i logaritmi avrassi

l. x	= 0, 2921674	x	= 1, 9596
l. x^2	= 0, 8765022	x^2	= 7, 524925
l. x^3	= 1, 1686696	x^3	= 14, 745844
l. A	= 9, 3466169		
l. Ax^{-1}	= 9, 0544495	Ax^{-1}	= 0, 113357
l. Num. ^o	= 8, 5799093	Num. ^o	= 0, 038011
l. Den. ^o	= 1, 4801046	Den. ^o	= 30, 213067
l. Fraz.	= 7, 0997147	Fraz.	= 0, 001258

Dunque $f = 1, 958342$. radice prossima.

7.° Sia ancora proposta l'equazione esponenziale $x^x - 30 = 0$.

Si riduca ai logaritmi, e si faccia x l. $x -$ l. 30 = y sarà $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{A + 1. x}$, ed $f = x - \frac{x l. x - l. 30}{A + 1. x}$.

Si faccia $x = 3$; poichè 3 è la radice più prossima intera, sarà $f = 3, 0502$ radice prossima.

Si faccia $x = 3, 0502$, non contando che 6 cifre decimali, sarà $f = 3, 050008$, radice che molto si avvicinerà alla vera.

XLV.

Dalla stabilita formola generale (XXXV) combinata coll' equazione $y = 0$ si possono ricavare varie altre espressioni di f ridotte in serie prestissimo convergenti: ne accenno qui una sola.

48 USO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Si faccia $x + \phi = 0$, e conseguentemente $x = 0$, poichè x è funzione di $x + \phi$: dalla prima di queste equazioni si cava il valore $\phi = -x$, quale sostituito nella solita formola generale darà la trasformata

$$0 = y - \frac{xy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3x}{6dx^3} + \frac{x^4 d^4x}{24dx^4} - \text{ec.}, \text{ ovvero,}$$

$$\text{mettendo } y \text{ in luogo di } 0, y = y - \frac{xy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3x}{6dx^3} + \frac{x^4 d^4x}{24dx^4} - \text{ec.}$$

Fingasi inoltre che la x , sia quella tale funzione di y , che la y stessa nella prima formola si è supposta di x ; cioè si scriva x invece di y , y invece di x , e la trasformata nell'alternata serie $x = x - \frac{ydx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4x}{24dy^4} - \text{ec.}$

Finalmente, riguardando come costante il differenziale dy , perchè tiene il luogo di dx , si faccia $\frac{dx}{dy} = p, \frac{dp}{dy} = q, \frac{dq}{dy} = r, \frac{dr}{dy} = s$, ec., si sostituiscano questi valori nella serie precedente, e supponendo $x = f$ si eguagli la f alla funzione ultima trasformata; ciò fatto si avrà $f = x - py + \frac{1}{2} qy^2 - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 + \text{ec.}$, serie che convergerà affai rapidamente, quando ad x si sostituisca un suo valor prossimo.

Un esempio renderà più intelligibile l'applicazione di questa serie.

Si cerchi una delle radici dell'equazione $x^4 - 4x - 14 = 0$.

Posto

Posto $n' = 4n - 14 = y$ si ha

$$\begin{aligned} dy &= (3x^2 - 4) dx ; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 4} = p \\ dp &= \frac{-6xdx}{(3x^2 - 4)^2} ; \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{6x}{(3x^2 - 4)^2} = q \\ dq &= \frac{(90x^2 + 24) dx}{(3x^2 - 4)^3} ; \quad \frac{dq}{dy} = \frac{90x^2 + 24}{(3x^2 - 4)^3} = r \\ dr &= \frac{-(2160x^2 + 1440x) dx}{(3x^2 - 4)^4} ; \quad \frac{dr}{dy} = -\frac{2160x^2 + 1440x}{(3x^2 - 4)^4} = s \end{aligned}$$

ec.

$$\begin{aligned} \text{Quindi } f &= n - \frac{y}{3x^2 - 4} - \frac{3xy^2}{(3x^2 - 4)^2} - \frac{(15x^2 + 4)y^3}{(3x^2 - 4)^3} \\ &- \frac{(90x^2 + 60x)y^4}{(3x^2 - 4)^4} - \text{ec.} \end{aligned}$$

Una radice dell' equazione sta tra 2, e 3, ed è molto più vicina al 3 che al 2, come facilmente può vedersi col porre $n = 2$, ed $n = 3$. Dunque, posto $n = 3$, farà $y = 1$, ed $f = 3 - \frac{1}{23} - \frac{9}{12167} - \frac{134}{6436343} = 3 - 0,04424 = 2,95576$, radice che può rendersi ancora più prossima spingendo la serie più avanti soltanto di uno o di due termini; ovvero, se si vogliono usare i logaritmi, come si è fatto nell' applicazione del 1.º metodo, farà sufficiente prendere per radice prossima 2,956, e sostituire questa ad n nella stessa serie, di cui basteranno più pochi termini ad avere una radice poco o nulla differente dalla vera.

50 **USO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ec.**

Per esempio, posto $n = 2,956$, si avrà quanto segue

$$\begin{array}{ll}
 L n = 0,4707044 & \\
 L n^2 = 0,9414088 & n^2 = 8,737936 \\
 L n' = 1,4121132 & n' = 25,829335 \\
 L y = 7,7271344 & y = 0,005335 \\
 L(3n^2 - 4) = 1,3466230 & 3n^2 - 4 = 22,213808 \\
 L \frac{y}{3n^2 - 4} = 6,3805114 & \frac{y}{3n^2 - 4} = 0,000240166 \\
 L y^2 = 15,4542688 & \\
 L(3n^2 - 4)' = 4,0398690 & \\
 L 3 = 0,4771213 & \\
 L \frac{3xy^2}{(3n^2 - 4)'} = 12,3622255 & \frac{3xy^2}{(3n^2 - 4)'} = 0,000000023 \\
 & \hline
 & 0,000240189 \\
 & n = 2,956 \\
 & \hline
 \text{Dunque } f = 2,955759811
 \end{array}$$

C A P O S E S T O .

DEL METODO DIRETTO DELLE TANGENTI.

PEr metodo diretto delle Tangenti s' intende la maniera di determinare coll' ajuto del Calcolo Differenziale la Tangente, Sottotangente, Normale, Sottonormale, ed altre rette o funzioni per ciascun punto di una curva conosciuta per mezzo di una particolare equazione tra le sue coordinate.

XLVI.

PROBLEMA 1.^o *Stabilire le formole generali di varie rette, o funzioni in una curva Algebrica AM. (Fig. 1.^a)*

Sia primieramente retto l' angolo delle coordinate, e fiano PM , pm due ordinate alla Curva infinitamente prossima tra loro. L' archetto infinitesimo Mm compreso da queste due ordinate, che per l' estrema sua piccolezza può riguardarsi come una linea retta, si supponga prolungato fino ad incontrar l' asse AN in qualche punto T , e dal punto M sia condotta la MR parallela ad AN , e la MN perpendicolare alla MT .

Egli è manifesto 1.^o Che MT è tangente, PT sottotangente, MN normale, PN sottonormale alla curva nel punto M . 2.^o Che MR ossia Pp è il differenziale dell' ascissa AP , mR quello dell' ordinata PM , ed Mm quello dell' arco AM . Quindi se si chiami x la AP , y la PM , ed s l' arco AM , sarà $MR = dx$, $mn = dy$, ed $Mm = ds$, ovvero, a cagione del triangolo MRm rettangolo in R , $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. 3.^o Che essendo simili per ordine i trian-

goli mMR , MTP , PMN dal paragone de' lati, che in essi si corrispondono, si avranno le seguenti formole pe' valori delle diverse funzioni a qualunque punto M della curva.

$$PT = \frac{ydx}{dy}, \text{ poichè } PT : MP :: MR : mR.$$

$$MT = \frac{yds}{dy} = \frac{y}{dy} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ poichè } MT : PM :: Mm : mR.$$

$$PN = \frac{ydy}{dx}, \text{ poichè } PN : PM :: mR : MR.$$

$$MN = \frac{yds}{dx} = \frac{y}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ poichè } MN : MP :: Mm : MR.$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{Rdy}{dx}, \text{ poichè } R : \text{Tang. } MTP :: PT : MP :$$

$$MR : mR (*).$$

$$\text{Tang. } PMT = \frac{Rdx}{dy}, \text{ poichè } R : \text{Tang. } PMT :: MP : PT :: mR :$$

$$MR.$$

Sia obliquo l'angolo AQM delle coordinate AQ , MQ . Se da M perpendicolarmente alla AQ si cali MP , farà essa il Seno, e PQ il Coseno del dato angolo AQM . Inoltre sia MT tangente alla curva, MN normale, mp infinitamente prossima a MP , MR parallela ad AQ , e si faccia $AP = x$, $MP = y$. Pe' triangoli simili MPT , MPN , MRm , si avranno tutte le formole precedenti.

La Curva abbia finalmente le ordinate convergenti ad uno stesso punto fisso P . Le formole generali della tangente, sottotangente, normale, sotto normale, ec. non differiranno dalle precedenti, se non in quanto che la dx vi esprimerà il differenziale di un arco di circolo, che passerà

(*) Il primo termine R di quest' analogia significa *Raggio*, quale può ancora supporfi eguale all'unità.

pel punto del contatto M , il cui raggio farà l'ordinata PM condotta dal punto P al punto M . Imperocchè,alzata la perpendicolare PT alla MP che incontri la tangente MT in qualche punto T , e condotta la Pm infinitamente prossima alla PM , s'vanirà l'angolo infinitesimo MPm in confronto di ciascuno dei due angoli TPM , TPm , i quali si potranno considerare tra loro eguali. In oltre se col raggio PM e centro P verrà descritto l'archetto di circolo MR , questi farà sensibilmente parallelo a TP , e si potrà assumere per una linea retta, ed il triangoletto differenziale MRm farà simile al triangolo rettangolo MPT , e conseguentemente al triangolo MPN determinato dalla normale MN . Dunque, chiamando dx l'archetto MR , ed y l'ordinata MP , si avrà come nelle curve riferite all'asse.

$$PT = \frac{PM \cdot MR}{mR} = \frac{y dx}{y}; \quad MT = \frac{PM \cdot Mm}{mR} = \frac{y}{dy} \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

$$PN = \frac{PM \cdot mR}{MR} = \frac{y dy}{dx}; \quad MN = \frac{PM \cdot Mm}{MR} = \frac{y}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Per far uso di tutte queste formole generali nella ricerca delle varie funzioni, che competono a ciascun punto di una data curva, si differenzj l'equazione della curva, affine di avere il valore di dx dato per y e dy , oppure quello di dy dato per x e dx , e si sostituisca questo valore nella formola generale, che rappresenta la cercata funzione. Ciò fatto nella trasformata formola si avrà il valore della stessa cercata funzione in termini finiti ed affatto libero da ogni quantità differenziale. Questo s'intenderà parimenti per tutte le altre formole, che verremmo esponendo.

Se il punto della curva, per cui vuolsi la cercata funzione, farà dato rispetto alla linea delle ascisse e delle ordinate, in luogo delle variabili x , y si potranno sostituire i valori, che esse hanno nel dato punto.

XLVII.

PROBLEMA 2.° *Determinare tutte le funzioni del problema precedente in ciascuna delle quattro Sezioni Coniche ordinarie data la loro equazione $y^2 = px \mp \frac{p_{xx}}{a}$. (*)*

Da quest' equazione si ha $y = \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$, e differenziando $dy = \frac{1}{2} \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(p dx \mp \frac{2p_{xx} dx}{a} \right) =$

$$\frac{(ap \mp 2p_{xx}) dx}{2a \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$dy^2 = \frac{(ap \mp 2p_{xx})^2 dx^2}{4a^2 \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2p_{xx}}{2a \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp 2p_{xx}}$$

e sostituendo questi valori nelle formole generali del problema precedente si avrà

$$PT = \frac{y dx}{dy} = \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2a \left(px \mp \frac{p_{xx}}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp 2p_{xx}} = \frac{ax \mp xx}{\frac{1}{2}a \mp x}.$$

(*) Il Segno — è per l'Ellissi, il + per l'Iperbola. Il Circolo è un Ellissi in cui $p = a$, e la Parabola è pure un Ellissi in cui l'asse a è infinito. Così l'equazione all'Ellissi è $y^2 = px - \frac{p_{xx}}{a}$, quella all'Iperbola $y^2 = px + \frac{p_{xx}}{a}$, quella al Circolo $y^2 = ax - xx$, e quella alla Parabola $y^2 = px$, poichè, essendo a infinita, $\frac{p_{xx}}{a}$ svanisce in confronto di px .

$$\begin{aligned}
 MT &= \frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \\
 &= \frac{2a(pn \mp \frac{pxx}{a})}{(ap \mp 2px) dx} \sqrt{\left(dx^2 + \frac{(ap \mp 2px)^2 dx^2}{4a^2 (pn \mp \frac{pxx}{a})} \right)} \\
 &= \frac{ax \mp xx}{a \mp 2x} \sqrt{\left(4 + \frac{p(a \mp 2x)^2}{a^2 ax \mp axx} \right)}. \\
 PN &= \frac{y dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a(pn \mp \frac{pxx}{a})^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(pn \mp \frac{pxx}{a} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} pn \mp \frac{px}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MN &= \frac{y}{dx} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \\
 &= \frac{(pn \mp \frac{pxx}{a})^{\frac{1}{2}}}{dx} \cdot \left(dx^2 + \frac{(ap \mp 2px)^2 dx^2}{4a^2 (pn \mp \frac{pxx}{a})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(pn \mp \frac{pxx}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{p(a \mp 2x)^2}{(4a ax \mp axx)} \right)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a \sqrt{(pn \mp \frac{pxx}{a})}}.$$

$$\text{Tang. } PMT = \frac{dx}{dy} = \frac{2a \sqrt{(pn \mp \frac{pxx}{a})}}{ap \mp 2px}.$$

XLIII.

COROLLARIO. Le formole delle stesse funzioni per l'Ellissi, e per l'Iperbola non differiscono che in alcuni segni, cioè dove il segno è doppio; il superiore serve per l'Ellissi, e l' inferiore per l'Iperbola.

Il Circolo è un Ellissi, in cui gli assi conjugati ed il parametro sono tra loro eguali: dunque posto $p=a$, dalle medesime formole all' Ellissi si avrà

$$PT = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}, MT = \frac{ax - xx}{a - 2x} \sqrt{4 + \frac{(a - 2x)^2}{4ax - x^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - 2x},$$

$$PN = \frac{1}{2}a - n, MN = (an - nn)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(ax - xx)}}$$

$$= \frac{1}{2}a = \text{Raggio},$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - xx)}}, \text{Tang. } PMT = \frac{2\sqrt{(ax - xx)}}{x - 2x}.$$

La Parabola è ella pure un' Ellissi, in cui a è quantità infinita. Dunque nelle formole all' Ellissi, trascurate tutte le quantità finite che si trovano o congiunte con a , o divise per a , si avranno le medesime formole ridotte alla Parabola; cioè

$$PT = \frac{ax}{\frac{1}{2}a} = 2x, MT = \frac{xs}{a} \sqrt{4 + \frac{pa^2}{a^2x}} = (4xx + px),$$

$$PN = \frac{1}{2}p, MN = (px)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{pa^2}{4a^2x}} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2},$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{ap}{2a\sqrt{px}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{x}}, \text{Tang. } PMT = \frac{2a\sqrt{px}}{ap}$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{x}{p}\right)}.$$

XLIX.

PROBLEMA 3.° *Determinare tutte le funzioni del 1.° problema in ciascuna delle 4 Sezioni Coniche di ogni ordine data la loro generale equazione* $y^{\frac{n+m}{n}} = n \cdot (a + p)^{\frac{n}{n}} \cdot \frac{p}{a}.$

$$\text{Da questa equazione si ha } y = \left(n \cdot a^{\frac{n}{n}} + n \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{1}{m+n}} =$$

$$x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{m}{m+n}} \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}, \text{ e differenziando far\`a } dy =$$

$$\frac{m}{m+n} x^{\frac{m}{m+n}-1} (a+x)^{\frac{m}{m+n}} \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}} dx +$$

$$\frac{n}{m+n} x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}-1} \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}} dx =$$

$$\frac{1}{m+n} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{1}{m+n}} \left(\frac{m}{x} + \frac{n}{a+x} \right) dx =$$

$$\frac{1}{m+n} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{1}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right) dx.$$

E sostituendo questo valore nelle solite formole generali avrassi

$$PT = \frac{y dx}{dy} = \frac{(m+n) \cdot (ax + xx)}{m \cdot (a+x) + nx}.$$

$$MT = \frac{y}{dy} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$\frac{(m+n)(ax+xx)}{m \cdot (a+x) + nx} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{(m+n)^2} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{2}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right)^2 \right)}.$$

$$PN = \frac{y dy}{dx} = \frac{1}{m+n} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{2}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right).$$

$$MN = \frac{y}{dx} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{2}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right)^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{(m+n)^2} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{2}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right)^2 \right)}$$

$$\text{tang. } MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m+n} \left(x^{\frac{m}{m+n}} (a+x)^{\frac{n}{m+n}} \cdot \frac{p}{a} \right)^{\frac{1}{m+n}} \left(\frac{m \cdot a + x + nx}{ax + xx} \right)$$

H

$$\text{Tang. } PMT = \frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)(ax+xx)}{\left(x^m \cdot a+x^n \cdot \frac{p}{a}\right) \cdot \frac{1}{m+n} \left(m \cdot a+x+n \cdot x\right)}.$$

L.

COROLLARIO. Fatto m ed n eguale all'unità, l'equazione si riduce alle curve coniche ordinarie, e tutte le funzioni ritrovate riduconsi a quelle del problema precedente.

LI.

PROBLEMA 4.° *Da un punto T dato nell'asse di una curva algebrica condurre alla stessa una tangente.*

La curva sia una delle 4. sezioni coniche ordinarie.

SOLUZIONE. Dal num. XLVII. si ha $PT = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x}$, e

fatta la quantità data $AT = b$, farà $AP = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} - b$.

Ma $AP = x$: dunque $x = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} - b$, e togliendo le fra-

zioni, ed eliminando la x farà x , ossia $AP = \frac{ab}{a+2b}$. In P perpendicolarmente all'asse si alzi l'ordinata PM , e si tiri MT , che farà la tangente cercata.

LII.

COROLLARIO. Nell'Iperbola, fatto $b = \frac{1}{2}a$, si ha $AP = \frac{ab}{a+2b} = \frac{ab}{0} = \infty$; Cioè la tangente condotta dal centro, e la sottotangente, che vi corrispondono, sono infinite.

LIII.

PROBLEMA 5.° *Sopra l'asse prolungato di una curva (Fig. 1.°) dato un punto D , ed in esso alzata la perpendicolare DV allo stesso asse, da un punto V dato in questa retta condurre una tangente alla curva.*

Sia questa curva una parabola ordinaria.

SOLUZIONE. Si chiami b la AD , c la DV . Sarà $DT = PT = x - b = x - b$, poichè (XLVIII) $PT = 2x$. Ma per la somiglianza dei triangoli VDT , MDT si ha $DT = \frac{DV \cdot PT}{PM} = \frac{2cx}{\sqrt{px}}$.

$$\text{Dunque } x - b = \frac{2cx}{\sqrt{px}}$$

$$x^2 - 2bx + bb = \frac{4c^2 x}{p}$$

e riducendo l'equazione, e liberando la x si avrà:

$$x = b + \frac{2c^2}{p} \pm \sqrt{\left(b + \frac{2c^2}{p}\right)^2 - b^2}$$

$$\text{e } DT = \frac{2c^2}{p} \mp \sqrt{\left(b + \frac{2c^2}{p}\right)^2 - b^2}.$$

Dunque la retta, che passerà per i due punti T, V , farà tangente alla curva.

LIV.

PROBLEMA 6.° *Nel perimetro di una Curva, in cui le coordinate formano un angolo retto, cercare un punto, dal quale si possa condurre una tangente, che formi, o coll'ascissa o coll'ordinata corrispondente un dato angolo.*

Sia la curva una delle fezioni coniche ordinarie, e si

chiami t la tangente del dato angolo 1.° Se quest' angolo è formato dalla tangente alla curva coll' ascissa corrispondente, prolungata se abbisogna, farà $t = \frac{dy}{dx} =$

$$\frac{ap \mp px}{2a \left(px \mp \frac{pxx}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ e liberando la } x \text{ da quest' equazione si}$$

$$\text{troverà } x = \frac{2a^2 t^2 \pm ap}{p \pm 4at^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-a^2 p^2}{p \pm 4at^2} + \left(\frac{2a^2 t^2 \pm ap}{p \pm 4at^2} \right)^2 \right)}$$

2.° Se il dato angolo è formato dalla tangente alla curva

$$\text{coll' ordinata, farà } t = \frac{dx}{dy} = \frac{2a \left(px \mp \frac{pxx}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp px}, \text{ ed } x = \frac{2a^2 \mp apt^2}{pt^2 \pm 4a} \pm \sqrt{\left(\frac{-apt^2}{pt^2 \pm 4a} + \left(\frac{2a^2 \mp apt^2}{pt^2 \pm 4a} \right)^2 \right)}.$$

LV.

COROLLARIO. Nella parabola si ha dunque pel 1.° caso $t = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\sqrt{px}}$, ed $x = \frac{p}{4t^2}$; e pel 2.° caso

$$t = \frac{dx}{dy} = \frac{2\sqrt{px}}{p}, \text{ ed } x = \frac{pt^2}{4}.$$

In ciascun caso poi, supposta la tangente t eguale al raggio del suo circolo, ossia $= 1$, si ha $x = \frac{1}{4} p$; cioè la tangente alla curva che forma o coll' asse, o coll' ordinata un angolo semiretto parte dall' estremità dell' ordinata, che passa pel foco della parabola.

LVI.

PROBLEMA 7.° *Determinare la sottotangente nella logaritmica.*

La logaritmica è una Curva XV (Fig. 2.°) di tale proprietà che fatta origine in qualunque punto A del di lei asse MN , e sopra di questo prese delle Ascisse AP , AQ , AR , ec. in serie aritmetica, le ordinate corrispondenti PB , QC , RD , ec. sono in serie geometrica, cioè quelle ascisse sono i logaritmi di queste ordinate. Se per esempio si chiami x alcuna delle ascisse AP , ed y l'ordinata corrispondente PB , farà $x = l.y$, ovvero $x = A l. y$, indicando per A il modulo del sistema logaritmico rappresentato dalla curva. Dunque, differenziando quest'equazione, si avrà $dx = \frac{A dy}{y}$, e $\frac{y dx}{dy} = A = PT$. Cioè la sottotangente nella logaritmica è una quantità costante, ed eguale al modulo del sistema da essa rappresentato.

LVII.

COROLLARIO. Nella Logaritmica, che rappresenta il sistema dei logaritmi iperbolici, il modulo, ossia la sottotangente è eguale all'ordinata, che passa per l'origine delle ascisse; poichè in questo punto si ha $x = 0$, ma $0 = l. 1$: dunque $y = 1 = A = PT$. E nel sistema dei logaritmi tabulari, il modulo, e la sottotangente sono eguali alla frazione $0,4343032$, cioè alla parte $0,4343032$ dell'ordinata, che passa per l'origine delle ascisse.

LVIII.

PROBLEMA 8°. *Determinare il valore della sottangente nella Spirale.*

La Spirale è una curva descritta da un punto C , (Figura 4^a) il quale, partendo dal centro di un circolo, percorre uniformemente il suo raggio CA , nel tempo stesso che questo raggio compisce con moto equabile un'intera rivoluzione intorno al suo centro. Il punto C alla fine del moto si trova all'altra estremità A del raggio, e prolungato questo al di là del circolo, e continuati i due moti, alla fine della seconda rivoluzione del raggio si ha una seconda rivoluzione spirale; alla fine della terza rivoluzione del raggio si ha una terza rivoluzione di spira, e così di seguito. La spirale ha tanti giri, quanti ne ha fatti il raggio intorno al centro. Archimede è stato l'inventore di questa curva.

Per l'uniformità dei moti, gli spazj trascorsi dal punto C sopra il raggio AC devono essere proporzionali agli spazj, od archi circolari descritti nei medesimi tempi dal raggio stesso. Dunque sarà $CM : CA :: \text{Arc. } ABN : \text{Arc. } ABNA$, e fatto $CM = y$, $AC = a$, $\text{Arc. } ABN = x$, ed $\text{Arc. } ABNA = c$, farà

$y = \frac{ax}{c}$ l'equazione alla Spirale nella prima rivoluzione del raggio.

$y = a + \frac{ax}{c}$ la stessa equazione nella seconda rivoluzione, poichè x diventa $c + x$.

$y = 2a + \frac{ax}{c}$ l'equazione nella terza rivoluzione, ec.

Differenziando adunque quest' equazione si avrà

$$dy = \frac{adx}{c}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c}{a}$$

Quindi $\frac{ydx}{dy} = \frac{cy}{a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{ax}{c} = x$. Dunque nella spirale d' Archimede la sottotangente è eguale all' ascissa x , cioè all' arco circolare intercetto dai raggi; che racchiudono l' arco corrispondente della curva ed arrivato il raggio CN alla sua prima posizione CA , la sottotangente nel punto A della curva sarà eguale all' intera periferia del circolo $ANBA$.

Nelle spirali di tutti i generi, la di cui equazione generale è $y^m = \frac{a^m x^n}{n}$, si avrà $PT = \frac{mc^n y^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot x$, formola che si ridurrà alla precedente nel caso di $m=n=1$.

LIX.

PROBLEMA 9.^o *Determinare il valore della sottotangente nella Quadratrice.*

Sia AC il raggio (Fig. 4.^a), C il centro, AD la tangente in A al quarto circolo AEB . Si intenda il raggio AC aggirarsi equabilmente intorno al suo centro per tutto il quadrante AEB , e nello stesso tempo muoversi la tangente AD con moto uniforme e parallelo da A verso C , di modo, che quando il raggio AC sia giunto alla posizione perpendicolare BC , la AD cada sopra BC . La curva AMB descritta dal punto M di continua intersecazione del raggio colla tangente si chiama *Quadratrice*.

In questa curva essendo uniformi i moti fatti in egual tempo dalla AD sopra AC , e dal raggio AC intorno al centro C , gli spazj trascorsi in due diversi tempi dalla AD sopra il raggio AC faranno proporzionali agli archi descritti nei medesimi tempi dallo stesso raggio nel quadrante; e però chiamando x lo spazio AP , z l'arco di circolo AE , y l'ordinata MP , a il raggio AC , e c il quadrante AEB si avrà $x:z::a:c$, onde $z = \frac{cx}{a}$. Ma pe' triangoli simili CPM , CAD , $CP:PM::AC:AD = \text{Tang. } AE$, ossia $a - x:y::a:\text{Tang. } z$. Dunque farà $y = \left(\frac{a-x}{a}\right) \cdot \text{Tang. } z = \left(\frac{a-x}{a}\right) \cdot \text{Tang. } \frac{cx}{a}$ l'equazione a questa curva, in cui le ascisse verranno computate dall'origine A . Che se le ascisse si prenderanno dal centro, fatto $PC = x$, farà invece l'equazione $y =$

$$\frac{x}{a} \cdot \text{Tang.} \left(c - \frac{cx}{a}\right) = \frac{x}{a} \text{Cot.} \frac{cx}{a}, \text{ quale differenziata darà } dy = \text{Cot.} \left(\frac{cx}{a}\right) \frac{dx}{a} - \frac{cx dx}{a^2 \text{Sin.}^2 \left(\frac{cx}{a}\right)}.$$

$$\text{Quindi } \mathcal{Q}T = -\frac{x dy}{dx} = -\frac{x}{a} \cdot \text{Cot.} \left(\frac{cx}{a}\right) + \frac{cx^2}{aa \cdot \text{Sin.}^2 \left(\frac{cx}{a}\right)}; \text{ fottangente, e } CT = C\mathcal{Q} + \mathcal{Q}T = y + \mathcal{Q}T = \frac{cx^2}{a^2 \text{Sin.}^2 \left(\frac{cx}{a}\right)}.$$

Si adopera la formola $-\frac{x dy}{dx}$ invece della solita $\frac{y dx}{dy}$, perchè in questa curva la fottangente si prende nella linea CB delle ordinate, e non fu quella delle ascisse, e la tan-

tangente MT va ad incontrare la CB dalla parte opposta rispetto al vertice A .

LX.

COROLLARIO 1.^o Se $x = a$ farà $CT = \frac{C}{\sin. 90^\circ} = \frac{c}{n} = c$, supposto il raggio eguale all' unità.

LXI.

COROLLARIO 2.^o Sopra AC prolungato verso N , si prenda $AN = AC$, in N al di sotto di AN si meni l' indefinita perpendicolare NR , e verso questa parte sia prolungata la curva Am . Sarà NR assintoto al ramo della curva Am ; cioè NR non toccherà la curva che in un punto infinitamente lontano dalla sua origine A : mentre nella prima equazione fatto $x = AN = -a$, farà $y = -2 \text{ Tang } c = -2 \text{ Tang } 90^\circ$, che è quantità infinita.

LXII.

PROBLEMA 10.^o Siano AN , AM (Fig. 5^a) due curve Algebriche riferite ad uno stesso asse AQ . Sia conosciuta l' equazione della prima AN , ed il rapporto delle ordinate PM alla seconda colle corrispondenti coordinate AP , PN alla prima curva; determinare il valore della sot tangente MT per un punto qualunque M della curva AM .

Sia pm infinitamente prossima alla PM , e siano MR , NS parallele all' asse AQ . Si faccia $AP = x$, $PN = y$, $PM = z$, $MR = NS = Pp = dx$, $nS = dy$, $mR = dz$, e si supponga la tangente cercata TM al punto M della curva

AM. Per la simiglianza dei triangoli *TPM*, *MRm*, si avrà
 $mR : MR :: MP : PT$, cioè $dz : dx :: z : PT = \frac{zdx}{dz}$.

Se per esempio si supponga, che la curva *AN* sia una parabola ordinaria, e che ciascuna ordinata *PM* della curva *AM* sia media proporzionale tra l'ascissa corrispondente *AP* e l'ordinata *PN* di questa parabola, farà

$$y = \sqrt{px}, \quad dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$$

$$z = \sqrt{xy}, \quad dz = \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}}$$

e sostituendo questi valori nella formola precedente avrassi

$$PT = \frac{dx\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xy}}{ydx + xdy} = \frac{2xydx}{ydx + xdy} = \frac{2x\sqrt{px} \cdot dx}{\sqrt{px} \cdot dx + \frac{xpdx}{2\sqrt{px}}}$$

$$= \frac{4x}{3}.$$

Dunque per condurre la tangente ad un dato punto *M* della curva *AM*, si dovrà abbassare l'ordinata *MP* all'asse *AQ*, e prendere la sottotangente *PT* eguale ai $\frac{4}{3}$ dell'ascissa *AP*, cioè $AT = \frac{4}{3} AP$.

LXIII.

PROBLEMA II.° *Le tre curve AO, AN, AM (Fig. 6.) hanno di comune il vertice A, e l'asse AP: le prime due sono conosciute, e la terza AM è tale, che ciascuna di lei ordinata PM è una data funzione delle due ordinate corrispondenti PO, PN alle altre due curve: determinare la sottotangente MT per ciascun punto M della curva AM.*

Si chiami *y* l'ordinata *PO* alla prima curva, *z* l'ordinata *PN* alla seconda, *v* l'ordinata *PM* alla terza, ed

la comune ascissa AP . Si concepiscano l'infinitamente prossima pm , le OS , NR , MQ parallele all'asse AQ , e le sottotangenti PZ , PV , MT nelle tre curve corrispondenti all'ascissa AP . La prima PZ si faccia $= a$, e la seconda $PV = b$, perchè amendue conosciute. Sarà $oS = dy$, $nR = dz$, $mQ = dv$, $MQ = NR = OS = dn$. Quindi dai due triangoli simili OPZ , OSo , si avrà $OP : PZ :: oS : OS$

$$\text{ossia } y : a :: dy : OS = \frac{ady}{y}$$

dai due altri triangoli NPV , NRn , $NP : PV :: nR : RN$

$$\text{ossia } z : b :: dz : RN = \frac{bdz}{z}$$

Ed eguagliando i valori sarà $\frac{ady}{y} = \frac{bdz}{z}$, e $dz = \frac{azdy}{by}$

Ma i due triangoli simili MPT , MQm , danno

$$mQ : MQ :: MP : PT.$$

Dunque sarà $PT = \frac{MP \cdot MQ}{mQ} = \frac{vdx}{dv} = \frac{avdy}{ydv}$, valore facile a liberarsi dalle variabili y , v , qualora in luogo di v , e dv si sostituiscano i loro valori dati per y , e z .

Sia v terza proporzionale a y , e z . Sarà $v = \frac{z^2}{y}$, e $dv = \frac{2zydz - z^2dy}{y^2}$, ovvero sostituendo a dz il suo valore, farà $dv = \frac{2az^2dy - bz^2dy}{by^2}$. Quindi $PT = \frac{ady}{y} \cdot \frac{v}{dv} = \frac{ady}{y} \cdot \frac{byz^2}{2az^2dy - bz^2dy} = \frac{ab}{2a - b}$.

Se l'ordinata MT fosse invece media tra OP , ed NP , come nella Fig. 7., avrebbesi $PT = \frac{2ab}{b + a}$. E se in quest'ipotesi la curva AN avesse un'altra origine B nell'asse fuori del punto A , ed al di là di P , come nella Fig. 8., diminuendosi l'ordinata NP al crescere di PO , il differenziale

dx sarebbe negativo, e la formola della sottangente farebbe $\frac{2ab}{b-a}$. Se AO , BN fossero due rette, e PM media tra OP , e PN , (Fig. 9, e 10), la curva AM farebbe una delle 4 sezioni coniche ordinarie. Poichè, chiamando m il seno, e n il coseno dell'angolo OAP , q il seno, e r il coseno dell'angolo NBP , $2a$ l'asse AB , x l'ascissa AP , nel triangolo rettangolo APO si avrebbe $n:m::AP:PO$, ossia $n:m::x:y = \frac{mx}{n}$, e nel triangolo NBP , $r:q::BP:PN$, cioè $r:q::(2a \mp x):x = \frac{q}{r} (2a \mp x)$; il segno superiore è per la figura 9, e l'inferiore per la fig. 10. Dunque moltiplicando farebbe yz , ossia $uv = \frac{mq}{nr} (2an \mp xx)$, e facendo $\frac{mq}{nr} = \frac{b^2}{a^2}$ risulterebbe l'equazione alle sezioni coniche $uv = \frac{b^2}{a^2} (2an \mp xx)$.

LXIV.

PROBLEMA 12.^o *Le due curve AM , BN (Fig. 11) sieno riferite ad uno stesso foco P , e si conosca la prima AM , la sua sottangente PG per ciascun punto M , e la costante relazione delle corrispondenti ordinate PM , PN nelle due curve; condurre la tangente NT ad un qualunque punto N della curva BN , cioè determinare il valore della sottangente PT allo stesso punto.*

Fatto centro al foco P co' due raggi PM , PN si descrivano i due archetti infinitesimi MR , NS , e si conduca la Pn infinitamente prossima alla PN . Si chiami x l'ordinata PN , y la PM , e p la sottangente PG .

Dai due triangoli rettangoli MPG , MRm , in cui gli angoli PMG , MmR sono sensibilmente eguali si ha

$$PM : PG :: mR : MR, \text{ ossia } y : p :: dy : MR = \frac{pdy}{y}$$

Dai due settori MPR , NPS si ha pure $PM : PN :: MR : NS$

$$\text{cioè } y : z :: \frac{pdy}{y} : NS = \frac{pdy}{y^2}$$

e dai triangoli NPT , NSn $NS : NS :: PN : PT$

$$\text{ossia } dz : \frac{pdy}{y^2} :: z : PT = \frac{pz^2 dy}{y^2 dz}$$

Se si suppone $MN = mn = a$, cioè che la proiezione d'ordinata MN compresa tra le due curve AM , BN sia costante ed eguale ad a , si avrà $z = y + a$, e quindi $dz = dy$,

$$\text{e } PT = \frac{pz^2}{y^2}.$$

Per condurre questa sottangente si tiri NF parallela a MG , la diagonale MF , e la NT parallela a MF . Sarà NT tangente, e PT sottangente al punto N della curva BN ; poichè i due triangoli simili PMG , PNF daranno $PM :$

$$PG :: PN : PF = \frac{PG \cdot PN}{PM} = \frac{pz}{y}, \text{ e gli altri due } PMF,$$

$$PNT, PM : PF :: PN : PT = \frac{pz^2}{y^2}.$$

Se AM invece di curva fosse linea retta, BN sarebbe una curva detta comunemente *Concoide*. L'inventore di questa curva è stato Nicomede.

LXV.

PROBLEMA 13.^o Delle due Curve CQD , AMC (Fig. 12.) riferite ad uno stesso asse AD l'una sia algebrica, e l'altra trascendente da un punto qualunque M di questa sia condotta MP perpendicolare al comun asse CD , che incontri in Q

l'altra curva. L'equazione alla curva algebrica sia espressa da una relazione qualunque tralle due coordinate CP , PQ , e quelle alla curva trascendente AMC da un'altra qualunque relazione tra l'arco CQ , e l'ordinata MQ : condurre al punto M di questa curva una tangente.

In due modi si può condurre questa tangente 1.° col ricercare il punto V , in cui essa tangente deve incontrar l'asse CD ; 2.° col supporre condotta al punto corrispondente Q della curva CDQ la tangente QZ , e determinare sopra di essa il punto d'incontro T .

La soluzione del problema riducesi adunque a saper determinare il valore della sottangente, che compete al punto M presa o sopra il comun asse CD , o sopra la supposta tangente QZ .

Sia mp infinitamente prossima all'ordinata MP , fiano MS , NQ parallele a CD , ed MR parallela a QZ , ossia all'archetto Qq .

Si faccia $CP = x$, $PQ = y$, $MP = z$, $MQ = v$, ed Arc. $CQ = s$.

Sarà $MS = Pp = dx$, $RS = qN = dy$, $mS = dz$, $MR = Qq = ds$, $mR = dv$. I triangoli simili mSM ,

MPV daranno $mS:MS::MP:PV = \frac{MP \cdot MS}{mS} = \frac{zdx}{dz}$, e i due

altri mRM , mQT , $mR:MQ::MR:QT = \frac{MQ \cdot MR}{mR} = \frac{vds}{dv}$.

Se in ciascuna di que due formole si sostituiranno i differenziali delle variabili, che stanno nelle equazioni delle due curve CDQ , AMC , si avrà in termini finiti il valore della settangente alla curva AMC .

La curva $AMCB$ sia a cagione d'esempio una cicloide generata dalla rotazione del circolo CDQ sopra la retta

AB. Al principio del moto del circolo genitore si suppone, che un punto della sua periferia stia in qualche punto *A* della retta *AB*, e che in seguito, arrotondandosi questo circolo sopra la *AB* da *A* verso *B*, il punto *A* segni sul piano la traccia del suo moto, il quale si continui, finchè il punto *A* ritorni sulla linea *AB*. La traccia ossia curva *AMCB* è la *Cicloide* generata. Questa cicloide dicesi *ordinaria* se il circolo non ha altro moto che quello della sua rotazione sopra la *AB*, *allungata* se il circolo ha ancora un moto particolare di traslazione nel senso del 1.º moto, *accorciata* se questo 2.º moto del circolo si fa in senso contrario a quello di rotazione.

La porzione *AB* determinata dai due prossimi contati del punto genitore sulla *AB* si chiama *base*, il punto *C* della curva più lontano dalla *AB* *vertice*, la perpendicolare *CB* abbassata dal punto *C* sulla *AB* *Asse* della Cicloide.

Dalla descrizione di questa curva si ha 1.º che nell'ordinaria cicloide la base *AB* è eguale alla periferia del circolo genitore, nell'allungata è maggiore della stessa base, e nell'accorciata è minore. 2.º Che, supposto equabile il moto di traslazione, ciascun ordinata *MQ*, ed il suo arco corrispondente *CQ* debbono avere una ragione costante, ed eguale a quella della base *AB* e del circolo *CQDC*; mentre, supposto il circolo in *EMF*, e condotte le corde *ME*, *QD*, queste faranno eguali, e parallele, essendo eguali gli archi *ME*, *QD* da esse sottesi, e però sarà ancora $MQ = ED$, ed $MF = CQ$. Ma $AD = \frac{1}{2} AB$, e corrisponde alla metà del circolo, e per l'indole della curva *AE*: $\text{Arc. } ME :: AD : \text{Arc. } EMF :: ED : \text{Arc. } MF$. Dunque la periferia dell'intero circolo starà alla base della cicloide, come l'arco *MF* a *ED*, ossia come l'arco *QC* a *MQ*. 3.º Quin-

di farà $MQ = \frac{AB \cdot \text{Arc} CQ}{CQ \cdot \text{DOC}}$, ovvero, chiamando a la base AB ,
e b la periferia del circolo, $CQ \cdot \text{DOC}$, farà $v = \frac{as}{b}$, e
differenziando $dv = \frac{ads}{b}$.

Ora per usare la prima formola $PV = \frac{zdx}{dz}$ si ha $dv =$
 $mR = mS - RS = dz - dy = \frac{ads}{b}$, onde $dz = \frac{ads}{b} + dy$; ma ds
 $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, e per la proprietà del circolo $y =$
 $\sqrt{(2rx - xx)}$, $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, e $dy^2 = \frac{r^2 dx^2 - 2rxdx^2 + x^2 dx^2}{2rx - xx}$.
Dunque farà $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, $dz = \frac{ardx}{b\sqrt{(2rx - xx)}} +$
 $\frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{(2rx - xx)}}$, e $PV = \frac{bzdx\sqrt{(2rx - xx)}}{ardx + brdx - bxdx}$
 $= \frac{bz\sqrt{(2rx - xx)}}{ax + br - bx}$.

Se la cicloide è ordinaria, in cui $a = b$, farà $PV =$
 $\frac{z\sqrt{(2rx - xx)}}{2r - x}$: questo valore gettato in analogia darà $2r - x ::$
 $\sqrt{(2rx - x^2)} :: z : PV$, ovvero $2r - x :: y :: z : PV$; ma nel circolo
 $2r - x :: y :: y :: x$. Dunque $y :: x :: z : PV$: cioè la sottangente sarà una
quarta proporzionale all'ordinata del circolo genitore, all'as-
scissa comune al circolo ed alla curva, ed all'ordinata della
curva stessa; e per la similitudine de' triangoli PQC , PMV la
tangente MV dovrà essere ancora parallela alla corda CQ .
Dunque per condurre questa tangente si tirerà la corda CQ ,
e del punto M si condurrà la parallela MV a questa corda.

Per la seconda formola $QT = \frac{vds}{dv}$, surrogati i valori di
 v , e dv si avrà immediatamente $QT = \frac{asds}{b} \cdot \frac{b}{ads} = s$.
Cioè nella cicloide la sottangente è eguale all'ascissa curvi-
linea,

vilinea, ossia all'arco di circolo QC , e se la cicloide farà l'ordinaria, la stessa sottangente farà ancora eguale all'ordinata MQ . Dunque in questo caso per condurre una tangente alla curva basterà prendere sopra la QZ la parte $QT = QM$, ed unire i punti M , T colla retta MT .

LXVI.

Una curva dicesi avere un assintoto allora che, avendo qualche ramo infinito la tangente, che si suppone condotta all'estremità di questo ramo, incontra o l'asse delle ascisse, o quello delle ordinate ad una distanza finita dal vertice, e l'assintoto è questa tangente infinita.

Tra gli assintoti alle curve alcuni sono paralleli alla linea delle ascisse, altri a quella delle ordinate, ed altri formano un angolo determinato o coll'asse principale, o colle ordinate. A determinare la posizione de' primi è necessario supporre x , ovvero $-x$ infinita, dy infinitamente piccola rispetto a dx , ed inoltre che y abbia un valore finito, oppure $= 0$. Se y ha un valore finito a , la linea parallela all'asse delle ascisse, e distante da quest'asse della quantità a , farà un assintoto. Se $y = 0$, farà $a = 0$, e l'asse stesso farà assintoto alla curva.

Similmente per determinare la posizione di un assintoto parallelo alle ordinate si dee supporre $\pm y$ infinita, dx infinitamente piccola rispetto a dy , e che x abbia un valore finito, ovvero $= 0$.

Dunque nella prima ipotesi dell'assintoto parallelo alla linea delle ascisse si farà $\frac{dx}{dy} = \infty$, ovvero $\frac{dy}{dx} = 0$, e

nella supposizione dell' assintoto parallelo alle ordinate si farà invece $\frac{dx}{dy} = 0$, ovvero $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Per una curva il cui assintoto deve fare un angolo determinato coll' asse principale, o colle ordinate, come succede nell' iperbola, supposta x infinita, si cercherà il valore della sottangente PT , e da questa si sottrarrà l'ascissa x . Il residuo farà il valore dell'intercetta AT (Fig. 13.) compresa tra l' origine A della curva e l' assintoto TM , e quindi condotta da A perpendicolarmente all' asse la retta AB , si cercherà il valore della AB , per la cui estremità B dovrà passare l' assintoto.

LXVII.

PROBLEMA 14.^o *Esaminare se una data curva abbia qualche assintoto, e qualora l' abbia, determinarne la posizione.*

Tutte le sezioni coniche l' Ellissi ed il Circolo non hanno assintoto, perchè hanno rami finiti.

La Parabola ha bensì i rami indefiniti, ma la tangente condotta dall' estremità della curva v' ad incontrare l' asse ad una distanza infinita dal vertice, mentre in questa curva si ha $PT = 2x$, ed $AT = 2x - x = x$, e posta infinita l' ascissa x farà $AT = \infty$. Dunque questa curva non ha assintoti.

Nell' iperbola, presa l' equazione riferita al parametro $y = \left(px + \frac{p^2 x^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$, e a cagione dell' assintoto supponendo $x = \infty$, farà $y = x \sqrt{\frac{p}{a}}$, poichè px s' vanisce in confronto di $\frac{p^2 x^2}{a}$, e differenziando si avrà $dy = dx \sqrt{\frac{p}{a}}$, e $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a}{p}}$, quantità che non può supporfi infinita, ovvero eguale a zero

per essere a e p quantità finite. Dunque la curva non ha verun assintoto parallelo alle ascisse, od alle ordinate. Ma supponendo che l'assintoto faccia coll' asse principale un qualche angolo, sarà $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{a}}$ il valore della tangente di quest' angolo, e $\frac{\frac{1}{2} ax}{\frac{1}{2} a + x}$ quello di AT , il qual valore, posta x infinita, si ridurrà a $\frac{\frac{1}{2} ax}{x} = \frac{1}{2} a$.

Dunque l' assintoto dovrà passare pel centro della curva, cioè per la metà dell' asse principale.

All' origine A della curva (Fig. 13.) si alzi AB perpendicolare all' asse AP . Nel triangolo rettangolo ATB si avrà $\text{Cof. } T : \text{Sin. } T :: AT : AB = \frac{\text{Sin. } T}{\text{Cof. } T} \cdot AT$; ma $\frac{\text{Sin. } T}{\text{Cof. } T} = \text{Tang. } T = \sqrt{\frac{p}{a}}$, ed $AT = \frac{1}{2} a$. Dunque $AB = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{ap}$. Inoltre chiamando b l' asse conjugato, il quale, come consta dalle sezioni coniche, è una media proporzionale, tra l' asse principale, ed il parametro, farà

$b = \sqrt{ap}$, e quindi $AB = \frac{1}{2} b$. Dunque la retta TM ,

che passerà pel centro T , e per l' estremità B della AB perpendicolare nell' origine A all' asse principale, ed eguale al semiasse minore, farà assintoto all' iperbola.

Sia la curva dell' equazione $(y - a)x = ab$.

Differenziando si trova $ydx + ydy - adx = 0$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{a-y}{x}$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{a-y}$. Nella supposizione dell' assintoto parallelo alle ascisse si ha $\frac{dy}{dx} = 0$, cioè $\frac{a-y}{x} = 0$, dal

che si ricava $y = a$. Dunque in qualche punto A dell' asse AB della curva (Fig. 14.) alzata la perpendicolare $AD = a$, e da D condotta parallelamente allo stesso asse la DG , farà questa un affintoto. Parimenti nel caso dell' affintoto parallelo alle ordinate si ha $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{a-y} = 0$, e quindi $x = 0$; cioè l' affintoto partirà dall' origine A delle ascisse, e farà l' indefinita AC normale in A all' asse AB .

Sia la curva dell' equazione $y^m = x^m + a^{m-n} x^n$, e si cerchi in essa la posizione dell' affintoto inclinato all' asse.

Differenziando l' equazione, e sostituendo il valore di $\frac{dx}{dy}$ nella formola della sottangente $\frac{ydx}{dy}$, si trova $\frac{ydx}{dy} =$

$$\frac{my^m}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}, \text{ ossia, rimettendo il valore di } y^m, \frac{ydx}{dy} = \frac{mx^m + ma^{m-n} x^n}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}, \text{ laonde } \frac{ydx}{dy} - x = \frac{(m-n)a^{m-n} x^n}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}.$$

Nel caso dell' affintoto inclinato all' asse, supposta x infinita, se $m-1 < n$, x^{m-1} farà infinitamente piccola rispetto ad x^{n-1} , e la formola si ridurrà a $\frac{(m-n)x^n}{nx^{n-1}} = \frac{m-n}{n} \cdot x = \infty$. Dunque non vi farà affintoto nella curva.

Se $m-1 = n$, x^{m-1} s'annullerà dal denominatore della formola, questa diventerà $\frac{(m-n)a^{m-n} x^n}{mx^{m-1}} = \frac{a}{m}$, e vi farà affintoto nella curva.

Finalmente se $m - 1 > n$ il numeratore farà infinitamente piccolo rispetto al denominatore, cioè la formola potrà suppersi $= 0$, e l'asintoto alla curva avrà l'origine comune colle ascisse.



CAPO SETTIMO.

DELLA FRAZIONE $\frac{0}{0}$, E DELLE TANGENTI

AI PUNTI MOLTIPLI DELLE CURVE.

LXVIII.

Nell'Analisi degli infinitamente piccoli, non meno che Algebra finita si danno certe formole scritte a modo di frazione, le quali, fatte certe sostituzioni, si riducono a $\frac{0}{0}$. La frazione $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ ne porge un esempio, qualora si sostituisca a in luogo di x ; poichè essa si riduce a $\frac{a^m - a^m}{a^n - a^n}$, cioè a $\frac{0}{0}$. Quale sarà adunque il valore di $\frac{0}{0}$.

Per procedere con qualche generalità sia $\frac{P}{Q}$ una frazione, in cui, essendo P , Q due diverse funzioni di x , fatto $x = a$, si abbia $\frac{0}{0}$.

Si differenzj a parte ciascun termine della funzione, e sia $dP = P' dx$, e $dQ = Q' dx$, essendo P' , Q' due altre funzioni di x ; sarà $\frac{dP}{dQ} = \frac{P' dx}{Q' dx} = \frac{P'}{Q'}$. In P' , ed in Q' si sostituisca la quantità a invece di x , e ciò, che ne risulta, sarà il valore di $\frac{0}{0}$. Imperciocchè, potendosi assumere $P + dP$ invece di P , e $Q + dQ$ invece di Q , sarà $\frac{P}{Q} = \frac{P + dP}{Q + dQ}$; ma $dP = P' dx$, $dQ = Q' dx$, e nell'ipo-

resi di $x = a$, P e Q si riducono a zero, dunque $\frac{P}{Q} = \frac{0 + P' dx}{0 + Q' dx} = \frac{P'}{Q'}$. Dunque, posto a in luogo di x in P' , e Q' , si avrà il valore della frazione $\frac{P}{Q}$, ossia di $\frac{0}{0}$.

Se dopo aver fatta la sostituzione di a in luogo di x , $\frac{P'}{Q'}$ si riduce ancora a $\frac{0}{0}$, con una seconda differenziazione del numeratore, e del denominatore si cercherà allo stesso modo una nuova frazione $\frac{P''}{Q''}$, in cui, posto a in luogo di x , si abbia il valore cercato. Se questa seconda differenziazione non basta, se ne potrà fare una terza, una quarta . . . ec.

Sia proposta la frazione $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, la quale, fatto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$. Paragonando questa frazione colla generale $\frac{P}{Q}$ si ha $P = x^m - a^m$, $Q = x^n - a^n$, onde $dP = mx^{m-1} dx$, $dQ = nx^{n-1} dx$, e $\frac{dP}{dQ} = \frac{mx^{m-1} dx}{nx^{n-1} dx} = \frac{m}{n} x^{m-n}$; cioè, posto a invece di x , farà $\frac{m}{n} a^{m-n}$ il valore di $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, ossia di $\frac{0}{0}$.

La frazione $\frac{x^n - a^n}{l.a - l.x}$, fatto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$; dunque si faccia $P = a^m - x^m$, e $Q = l.a - l.x$. Sarà $dP = -nx^{n-1} dx$, $dQ = -\frac{dx}{x}$, e $\frac{dP}{dQ} = \frac{-nx^{n-1} dx}{-dx : x}$

80 DELLA FRAZIONE $\frac{0}{0}$ E DELLE TANGENTI

$= n^n$, e sostituendo a in luogo di n , farà na^n il valore di $\frac{0}{0}$.

Sia la frazione $\frac{a^x - a^{-x}}{1 + x}$, quale si riduce a $\frac{0}{0}$ nella supposizione di $x = 0$. Differenziando il numeratore ed il denominatore si ha $\frac{dP}{dQ} = \frac{d(a^x - a^{-x})}{d(1 + x)} = \frac{a^x \text{ l. } a + a^{-x} \text{ l. } a}{dx \cdot (1 + x)} = (a^x \text{ l. } a + a^{-x} \text{ l. } a)(1 + x)$, e fatto $x = 0$ farà $n^0 \text{ l. } a + n^0 \text{ l. } a (1 + 0) = 2 \text{ l. } a$ il valore della frazione.

Similmente la frazione $\frac{2a\sqrt{(3ax^2 - 2a^3)} - 2x^3}{\sqrt{(2a^2 - x^2)} + x - 2a}$, supposto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$.

Dunque operando, come si è fatto negli esempi prece-

denti, si avrà $\frac{dP}{dQ} = \frac{4a^2 x dx (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{1}{2}} - 4x dx}{x dx (2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + dx} = \frac{4a^2 x (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{1}{2}} - 4x}{-x(2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}$, e mettendo a in luogo di x farà

$\frac{dP}{dQ} = \frac{0}{0}$. Differenziando adunque di nuovo ciascun termine a parte si avrà quest' altra frazione $\frac{4a^2 dx (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{1}{2}} - 16a^3 x^2 dx (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{3}{2}} - 4dx}{-dx(2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 dx (2a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}}$, la quale,

cancellando dx perchè si ritrova in ciascun termine, e mettendo a in luogo di x , si riduce a $8a$. Dunque $8a$ farà il valore della frazione nel caso di $x = a$.

La frazione $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{1+x}$, nel caso di $x = 1$, diventa

$\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$. Riducendo i termini allo stesso denominatore, cioè scrivendo la frazione in questa forma $\frac{x \cdot 1 \cdot x - x + 1}{x \cdot 1 \cdot x - 1 \cdot x}$, differenziando ciascun termine, e riducendo, si avrà la nuova frazione $\frac{1 \cdot x}{1 + 1 \cdot x - 1 \cdot x}$, la quale, posto 1 invece di x , diventa ancora $\frac{0}{0}$.

Differenziando di nuovo la ridotta, dividendo per dx , e sostituendo 1 ad x si avrà $\frac{1 \cdot x}{1 \cdot x + 1 \cdot x} = \frac{1}{2}$. Dunque $\frac{1}{2}$ sarà il valore di $\frac{0}{0}$.

LXIX.

Qualora però dopo varie differenziazioni non riesca di determinare il valore di $\frac{0}{0}$, si potrà usare il metodo seguente.

Sia a quel valore di x , che riduce la frazione a $\frac{0}{0}$. In ciascun termine della data frazione in luogo di x si sostituisca $x + dx$, ovvero $x - dx$, e si riduca la formola ai minimi termini. Se questa nuova frazione non dà il valore cercato, cioè, se posto a in luogo di x , essa si riduce ancora a $\frac{0}{0}$, si ripeta la stessa operazione una, due, 3... ec. volte. Alla fine si giugnerà sicuramente ad una frazione della forma $\frac{Mdx^m}{Ndx^n}$, il cui valore sarà o finito, ed eguale a

$\frac{M}{N}$, o infinito, o infinitamente piccolo, secondo che m sarà o eguale, o minore, o maggiore di n .

Per esempio nella frazione $\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{(2ax - 3ax + xx)}}{\sqrt{(a - x)}}$, la quale nella supposizione di $x = a$ si riduce a $\frac{0}{0}$, diffe-

§2 DELLA FRAZIONE $\frac{P}{Q}$, E DELLE TANGENTI

renziando il numeratore, ed il denominatore si troverà

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{0}{0}; \frac{ddP}{ddx} = \frac{0}{0}; \frac{d^2P}{d^2x} = \frac{0}{0}; \text{ e così all'infinito. Per deter-}$$

minare adunque il valore della frazione $\frac{P}{Q}$ nel caso di $x=a$,

si metta $a+dx$ in luogo di x , e si avrà la trasformata

$$\frac{\sqrt{(2aa - 3a^2 - 3adx + a^2 + 2adx + dx^2)}}{\sqrt{a - a - dx}}, \text{ la quale, mettendo } a$$

invece di x , e trascurando dx^2 , si ridurrà, a $\frac{\sqrt{-adx}}{\sqrt{-dx}} = \sqrt{-a}$,

valore della frazione nel caso di $x = a$.

Parimenti nella frazione $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{l.x}$, mettendo $1+dx$

in luogo di x , si avrà la trasformata $\frac{1+dx}{dx} - \frac{1}{l.(1+dx)}$,

ossia riducendo i termini allo stesso denominatore

$$\frac{(1+dx)l.(1+dx) - dx}{dx l.(1+dx)}.$$

Ma $l.(1+dx) = dx(1 - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2 - \text{ec.})$. Dunque sostituendo questo logaritmico farà la nuova trasformata

$$\frac{(1+dx)dx(1 - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2 - \text{ec.}) - dx}{dx^2(1 - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2 - \text{ec.})} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}dx + \text{ec.}}{1 - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2 - \text{ec.}}$$

che, trascurando tutti i termini infinitesimi, si ridurrà unicamente a $\frac{1}{2}$.

LXX.

Un problema analogo al precedente, ma puramente analitico, ed affatto indipendentemente dal calcolo differenziale si è quello in cui si cerca, *se una data formola scritta a foggia di frazione possa ridursi alla forma di $\frac{P}{Q}$, e con quale sostituzione della variabile.*

Si eguagli a zero separatamente il numeratore, ed il denominatore della data formola, e si cerchi in ciascuna

delle due equazioni il valore di x . E' chiaro, che se i due valori trovati faranno eguali, sostituiti nella formola la ridurranno alla richiesta espressione $\frac{0}{0}$. Oppure si eguagli a zero il più semplice fattore della frazione, in questa equazione si cerchi il valore di x , e questo si sostituisca nell'altro fattore. Se questo fattore si riduce al zero, il valore trovato farà quello, che scioglierà il problema. Conchiudo con alcuni esempj presi dalle formole precedenti.

Nella formola $\frac{a^x - x^x}{l.a - l.x}$, posto $a^x - x^x = 0$, si ha $x = a$, e posto $l.a - l.x = 0$, si ha pure $x = a$. Dunque la formola è riducibile a $\frac{0}{0}$ nel caso di $x = a$.

Nella formola $\frac{a^x - a^{-x}}{l.(1+x)}$ la supposizione di $a^x - a^{-x} = 0$ dà $a^x = a^{-x}$, onde $x l.a = -x l.a$, $x = -x$, ed $x = 0$. La supposizione di $l.(1+x) = 0$ dà $1+x = 1$, e $x = 0$, poichè 0 è il logaritmo dell'unità. Dunque la frazione si riduce a $\frac{0}{0}$ nel caso di $x = 0$.

Nella formola $\frac{x l.x - x + 1}{x l.x - l.x}$, facendo il denominatore $x l.x - l.x = 0$, si ha $x l.x = l.x$, e dividendo per $l.x$, $x = 1$: questo valore di x sostituito nel numeratore lo rende $= 0$. Dunque 1 è quel valore che riduce la formola a $\frac{0}{0}$.

Similmente nella formola $\frac{2a(3ax^2 - 2a')^{\frac{1}{2}} - 2x^2}{(2a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x - 2a}$ eguagliando il denominatore a zero, togliendo il radicale, e riducendo, si ha l'equazione quadratica $x^2 + 2ax + a^2 = 0$, la cui radice è $x - a = 0$, ossia $x = a$. Questo valore sostituito nel numeratore lo fa svanire: dunque esso riduce la formola a $\frac{0}{0}$.

LXXI.

Sia $SOMZM'ON''$ (Fig. 15.^a) una curva i cui rami s' incontrano in qualche punto O chiamato *Punto multiplo* della curva. Sia AR la linea delle ascisse, AZ quella delle ordinate. Sulla prima prendansi diverse ascisse AP , AR ; sulla seconda diverse ordinate AQ , AZ , e si menino le coordinate corrispondenti PM , PM' , RO , ec. QN , QN' , QN'' , ZO ec.

Dalla semplice ispezione della figura è evidente 1.^o che a ciascun ascissa AP presa sulla AR corrisponde, almeno dentro un certo limite, un certo numero d' ordinate PM , PM' . 2.^o Che quelle tra queste ordinate, le quali corrispondono al punto multiplo O , dove i rami della curva s' incontrano, si eguagliano tra loro, e si confondono in una sola. 3.^o Che a ciascun ordinata AQ presa sulla AZ corrisponde parimente un certo numero di ascisse QN , QN' , QN'' , e che quelle tra queste ascisse, le quali corrispondono allo stesso punto O , si eguagliano tra loro, e si compenetrano in una sola OZ .

Ciò posto si chiami a il valore dell' ascissa x , e b quello dell' ordinata y nel punto multiplo O . L' equazione alla curva deve esser tale, che, posto a in luogo di x , si abbiano tanti valori di y tutti eguali a b quanti sono i rami, che s' incontrano in O , e che, posto b in luogo di y , si abbia lo stesso numero di valori x tutti eguali ad a . Cioè l' equazione alla curva deve potersi ridurre alla forma

$$(x-a)^m A + (x-a)^{m-1} (y-b) B + (x-a)^{m-2} (y-b)^2 C + (x-a)^{m-3} (y-b)^3 D + \dots + (y-b)^m T = 0,$$

denotando A, B, C, \dots, T delle funzioni qualunque di

x , y e costanti, ed m il grado di molteplicità, ossia il numero dei rami della curva, che passano pel punto O . Imperciocchè in quest' equazione, supposto $x = a$, svaniscono tutti i termini affetti dal fattore $x - a$, ed essa si riduce a $(y - b)^m T = 0$, ossia $(y - b)^m = 0$, la qual equazione è il prodotto di un numero m d' equazioni semplici ed eguali ad $y - b = 0$; cioè di un numero m di valori y tutti eguali a b . Lo stesso si dica rispetto al valore $y = b$. In tal caso l' equazione si riduce ad $(x - a)^m = 0$, dove i fattori essendo m in numero, ed eguali all' equazione semplice $x - a = 0$, si ha un egual numero di valori di x tutti eguali ad a .

Supponendo ora che la predetta equazione venghi differenziata m volte di seguito col riguardare le infiniteesime dx , dy o come variabili, o come costanti, e considerando attentamente le varie equazioni differenziali ottenute deve sembrar manifesto.

1.° Che non v'è che l' ultima tra queste equazioni, la quale abbia qualche termine non affetto dai fattori $x - a$, $y - b$.

2.° Che trovandosi nella curva qualche punto multiplo, debbono svanire tutte le predette equazioni, o differenze, eccettuata l' ultima, quando in luogo di x , e di y venghino sostituiti i valori a , b corrispondenti a questo punto.

3.° Che in quest' ultima equazione differenziale tutti i termini, eccettuati quelli, nei quali entrano dx^m , e dy^m , sono affetti da qualche potenza di $(x - a)$, e $(y - b)$; e che perciò dopo la sostituzione, la medesima equazione ridurrassi alla forma di $dx^m P + dy^m Q = 0$, in cui P , e Q saranno ancora funzioni di x , y e costanti non affette dai

86 DELLA FRAZIONE $\frac{0}{0}$, E DELLE TANGENTI

fattori $x - a$, e $y - b$. Finalmente, che da nessuna delle accennate equazioni, fuorchè dall'ultima, si può avere il valore di $\frac{dx}{dy}$ non altrimenti espresso che per $\frac{0}{0}$. Comproviamo tutto ciò con un esempio; e sia la curva dell'equazione $a(x - a)^2 - b(y - b)^2 = 0$.

Differenziando due volte quest'equazione si ha

$$1.^{\circ} 2adx(x - a) - 2bdy(y - b) = 0.$$

$$2.^{\circ} 2adx^2 + 2addx(x - a) - 2bdy^2 - 2bddy(y - b) = 0.$$

Fatto $x = a$, ed $y = b$, la prima di queste due equazioni svanisce interamente, e la seconda si riduce a

$$2adx^2 - 2bdy^2 = 0, \text{ donde si ricava } \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}, \text{ e } \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

e sostituendo nella formola delle tangenti si ha $\frac{ydx}{dy} =$

$$\pm b \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}. \text{ Questo doppio valore dinota due tangenti}$$

al punto multiplo delle curve, le quali appartengono a due rami, che quivi s'incontrano,

LXXII.

Quindi per determinare se una curva, di cui si conosce l'equazione, abbia uno o più punti multipli, in qual parte del suo perimetro si trovino questi punti, e quanti rami passino per ciascun de' medesimi, si differenzj la di lei equazione, si eguagli a zero separatamente la somma dei termini affetti da dx , e quella dei termini affetti da dy , e da queste due equazioni insieme combinate si cavino i valori di x , e y , che competono all'uno ed ai più punti multipli della curva. Per assicurarsi però dell'esistenza di tali punti, e per determinarne il grado di molteplicità in cias-

cun d'essi. Si esamini prima se i trovati valori di x ed y , sostituiti nella data equazione, facciano svanire ogni quantità: in tal caso si differenzj di nuovo l'equazione della curva, trattando per maggior brevità dx , e dy come costanti, e in questa seconda equazione differenziale si sostituiscano i valori di x , ed y . Se dopo questa sostituzione non svaniscono tutti i termini dell'equazione, il punto multiplo non è che doppio, cioè per esso non passano che due soli rami della curva; ma se tutti que' termini svaniscono il punto è più che doppio; perciò si passi ad una terza differenziazione, supponendo sempre costanti dx , e dy , ed avendo sostituiti nella nuova equazione differenziale i valori di x ed y , il punto sarà triplo, quando non tutti i termini svaniscono, e più che triplo, quando svaniscono tutti. Si profegua quindi a differenziare ed a sostituire i soliti valori, fino a che si arrivi ad un'equazione, i cui termini dopo la sostituzione non svaniscono interamente. Il grado di differenziazione di quest'equazione, indicherà quello di molteplicità del punto cercato.



CAPO OTTAVO.

DE' MASSIMI, E DE' MINIMI.

LXVI.

SE la legge, per cui una quantità variabile è prodotta, esige, che questa quantità cresca, ovvero decresca fino ad un certo segno per poi immediatamente scemare o crescere, la quantità variabile pervenuta a questo punto di maggiore o di minore grandezza prende il nome di *Massimo* o di *Minimo*, ed il Metodo analitico, col quale si determina il di lei valore, oppure quello di una qualche sua funzione in questo punto, si chiama *Metodo de' Massimi*, e de' *Minimi*.

LXXIV.

Sia y una funzione di x , la quale, per qualunque valore si sostituisca ad x , riceva sempre un valore reale, e si indichi per x quel valore della stessa x , che riduce la y ad un massimo, ovvero ad un minimo. E' manifesto che se ad x si sostituisca $x + \phi$, ovvero $x - \phi$, supponendo ϕ una quantità molto piccola, la corrispondente funzione sarà minore di y , quando questo sia un massimo, e maggiore di y , quando y sia un minimo.

Posto adunque $x \pm \phi$ in luogo di x , la funzione y diventerà (Art. XXXV.) $y \pm \frac{\phi dy}{dx} + \frac{\phi^2 ddy}{2dx^2} \pm \frac{\phi^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ec.}$, e però nel caso del massimo valore di y dovrà essere

$$y > y \pm \frac{\varphi dx}{dx} + \frac{\varphi^2 ddy}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ec.}$$

e pel caso del minimo

$$y < y \pm \frac{\varphi dy}{dx} + \frac{\varphi^2 ddy}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ec.}$$

Cioè, trascurando tutti i termini in cui entra qualche potenza della piccolissima quantità φ , sarà pel primo caso

$$y > y \pm \frac{\varphi dy}{dx}, \text{ e pel secondo } y < y \pm \frac{\varphi dy}{dx}.$$

Ma nel caso di un massimo o di un minimo s'annulla ancora la quantità $\pm \frac{\varphi dy}{dx}$, poichè la formola si riduce alla sola y . Dunque per conoscere se una funzione comunque composta di variabili e costanti possa ridursi ad un massimo, oppure ad un minimo, si faccia essa eguale ad y , si differenzi, e si cavi il valore di $\frac{dy}{dx}$. Questo valore si egualgi a zero, e dalla formata equazione si elimini la w . Il trovato valore di w sarà quello, che renderà massima o minima la funzione data, qualora essa sia suscettibile di tale stato. La ragione di ciò si è, che nel caso di un massimo o di un minimo, dovendo essere $\frac{\varphi dy}{dx} = 0$, sarà pure $\frac{dy}{dx} = 0$, onde ec. (*).

MM

(*) Dall' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$, moltiplicando per dx , si ha $dy = 0$.

Cioè nel punto di massimo, o di minimo, il differenziale della variabile è zero. Dunque in questo punto la variabile può riguardarsi come costante.

LXXV.

Non è però così facile il conoscere se l'ottenuto valore di x corrisponda ad un massimo, oppure ad un minimo; anzi non di rado accade, che questo valore di x , quantunque sia $\frac{dy}{dx} = 0$, non appartiene nè all'uno, nè all'altro.

Sia f il valore, ovvero uno tra i valori di x che si ottengono dall'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$; questo valore si sostituisca in ciascuna delle espressioni $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec., e si faccia $\frac{d^2y}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, ec. Sarà la funzione trasformata $y + \frac{1}{2} \phi^2 p \pm \frac{1}{6} \phi^3 q + \frac{1}{24} \phi^4 r \pm$ ec.

Ora se p è quantità positiva, trascurando tutti i termini della formola dopo $\frac{1}{2} \phi^2 p$ come affai piccoli, la stessa formola si ridurrà ad $y + \frac{1}{2} \phi^2 p$, cioè ad uno stato maggiore di y , e perciò y sarà un minimo.

Se p è negativa, farà invece la formola $y - \frac{1}{2} \phi^2 p$, quantità minore di y , il che indica, che y sarà un massimo.

Se p è zero la stessa formola diventerà $y \pm \frac{1}{6} \phi^3 q + \frac{1}{24} \phi^4 r \pm$ ec., in cui se q non è zero, non si avrà nè un massimo, nè un minimo: poichè se q non è zero, qualunque sia o positivo, o negativo il valore di q , ommessi tutti i termini al di là di $\frac{1}{6} \phi^3 q$, nel caso del massimo sarà $y \pm \frac{1}{6} \phi^3 q < y$, e nel caso del minimo $y \pm \frac{1}{6} \phi^3 q > y$, il che evidentemente ripugna a motivo del doppio segno, non potendo mai essere nè $y + \frac{1}{6} \phi^3 q < y$, nè $y - \frac{1}{6} \phi^3 q > y$.

Sia adunque $q = 0$, e la formola diventi $y + \frac{1}{24} \phi^4 r \pm$ ec.

E DEI MINIMI.

91

Se r è positiva farà $y + \frac{1}{24} \phi' r > y$; cioè y farà un minimo.

Se r è negativa farà $y - \frac{1}{24} \phi' r < y$, ed y farà un massimo.

Ma se ancora r è zero, il giudizio dovrà riportarsi alla lettera seguente s , e farà del tutto simile al di già fatto in riguardo alla lettera q ; cioè se s non farà eguale a zero, non avrassi alcun massimo o minimo, e se s farà $= 0$, la funzione y farà un minimo, o un massimo, secondo che la seguente lettera t farà positiva, o negativa. Che se ancora t sia $= 0$, si dovrà proseguire collo stesso criterio, e formare il giudizio della seguente lettera, e così in poi.

LXXVI.

Dunque in generale, giunti al differenziale $\frac{\phi^m d^m y}{dx^m}$ che non isvanisce, se m farà numero dispari non si avrà alcun massimo o minimo, e se m farà numero pari si avrà o un massimo, o un minimo, secondochè $\frac{\phi^m d^m y}{dx^m}$ farà o negativo, o positivo.

LXXVII.

Ciò però dee unicamente intendersi, allora che la ritrovata funzione sia positiva. Che se questa farà negativa, si avrà invece un massimo negativo, quando l'ultimo differenziale, che non isvanisce, farà positivo, ed un minimo negativo, quando questo differenziale farà negativo.

LXXVII.

PROBLEMA 1.° *Determinare i casi, nei quali una funzione della forma di $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + M$ può diventar massima, o minima.*

1.° Sia la proposta funzione $x^2 + ax + b$.

Si faccia $x^2 + ax + b = y$.

$$\text{Sarà } \frac{dy}{dx} = 2x + a$$

$$\frac{d^2y}{2dx^2} = 1,$$

e posto $\frac{dy}{dx}$, ossia $2x + a = 0$, avrassi $x = -\frac{1}{2}a$, e la funzione sarà un minimo, poichè $\frac{d^2y}{2dx^2}$, ha un valore positivo; così, sostituendo il valore di x , sarà questa funzione minima $y = b - \frac{1}{4}a^2$.

2.° Sia la funzione $x^3 - ax^2 + bx + c$.

Posto $x^3 - ax^2 + bx + c = y$.

$$\text{Sarà } \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\frac{d^2y}{2dx^2} = 3x - a$$

e fatto $3x^2 + 2ax - b = 0$ si troverà $x = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{aa - 3b}$, valore per cui la formola non potrà ridursi nè ad un massimo, nè ad un minimo, quando non sia $aa < 3b$; poichè se $aa < 3b$, il radicale sarà immaginario, e se $aa = 3b$, sarà $\sqrt{aa - 3b} = 0$, onde $x = \frac{1}{3}a$, e $\frac{d^2y}{2dx^2} = 0$. Ma $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$, cioè $\frac{d^3y}{6dx^3}$ non è zero. Dunque in questo caso non si avrà verun massimo, o minimo.

Se $aa < 3b$, farà reale il valore di $\sqrt{(aa - 3b)}$, e sostituendo il valore di x , avrassi $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm \sqrt{(aa - 3b)}$. Dunque la formola farà un minimo, quando $x = \frac{1}{3}a + \sqrt{(aa - 3b)}$, poichè $\frac{ddy}{2dx^2}$ farà positivo, e un massimo, quando $x = \frac{1}{3}a - \sqrt{(aa - 3b)}$, poichè $\frac{ddy}{2dx^2}$ farà negativo.

$$3.^{\circ} \text{ Sia } x' = \frac{28}{3} x' + 28x' - 32x' + 1 = x'$$

$$\text{Sarà } \frac{dy}{dx} = 4x' - 28x' + 56x' - 32$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x' - 28x' + 28$$

e formando l'equazione $4x' - 28x' + 56x' - 32 = 0$, e risolvendo si otterranno le tre radici $x' = 1$, $x' = 2$, $x' = 4$.

Per la prima di queste radici si avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = 6$, dunque la funzione corrispondente a questo valore di x , cioè $y = -11 \frac{1}{3}$, farà un massimo negativo.

Per la seconda radice si avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = -4$, e la corrispondente funzione $y = -9 \frac{1}{3}$ farà un minimo negativo.

Per la terza si avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = 12$, e perciò la funzione ritornerà massima negativa, e farà $y = -20 \frac{1}{3}$.

4.^o Abbiassi per ultimo la funzione $x' = \frac{11}{3} x' + \frac{1}{3} x' - 4x' + 1 = y$. Sarà $\frac{dy}{dx} = 6x' - 12x' - 6x' - 12x'$.

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 15x' - 24x' + 9x' - 12.$$

Si formi l'equazione $6x' - 12x' - 6x' - 12x' = 0$, ossia $x' - 2x' - x' - 2x' = 0$, quale risolta nei fattori

$x^2(x^2+1)(x-2)=0$, darà due radici eguali $x=0$, due immaginarie comprese nel fattore $x^2+1=0$, ed una reale $x-2=0$.

Le due radici eguali, e le due immaginarie sono superflue, perchè non possono ridurre la funzione nè ad un massimo, nè ad un minimo. L'ultima radice $x=2$ sostituita dà $\frac{ddy}{2dx^2}=72$: dunque essa riduce la funzione ad un massimo negativo, che farà $y=-19\frac{1}{2}$.

LXXIX.

Dai recati esempj s' inferisce 1.° che la determinazione dei massimi, e dei minimi in una data formola dipende dalle radici dell' equazione $\frac{dy}{dx}=0$, cioè che tutti i massi-

mi e minimi della formola generale $y=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3} \dots +M$ dipendono dalle radici dell'equazione $mx^{m-1}+\overline{m-1}.Ax^{m-2}+\overline{m-2}.Bx^{m-3}+\overline{m-3}.Cx^{m-4}+\dots=0$, in cui il massimo esponente di x è minore di un unità dell' esponente massimo nella data.

2.° Che la medesima funzione non può avere alcun massimo, o minimo, quando i differenziali di grado impari $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^5y}{dx^5}$; ec. dopo le sostituzioni non si riducano al zero.

3.° Che si avrà sicuramente qualche massimo, o minimo, quando questi differenziali si annulleranno, ossia quando l' ultimo differenziale, che svanisce dopo le sostituzio-

ni, farà di grado impari, e che le radici della prima equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = 0$ non faranno tutte nè eguali, nè immaginarie.

4.° Che una funzione potrà avere più massimi, e più minimi, e ciascun massimo potrà essere indistintamente o maggiore, o minore di ciascun minimo, e viceversa; poichè ad esser massima o minima una funzione null' altro si richiede, fuorchè ella sia maggiore o minore delle funzioni, che la comprendono immediatamente.

5.° Che se l' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ avrà un numero di radici eguali, non si avrà verun massimo, o minimo, quando questo numero sia pari, e si avrà un sol massimo, od un sol minimo, quando sia dispari.

LXXX.

PROBLEMA 2.° Cercare tutti i massimi, e minimi possibili nella frazione della forma $\frac{P}{Q}$, in cui P e Q sono funzioni razionali di x .

Sia la frazione $\frac{x}{1+xx}$.

Facendo $y = \frac{x}{1+xx}$, e differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$, e $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6x+xx^3}{(1+xx)^3}$. Quindi formando l' equazione $\frac{1+xx}{(1+xx)^3} = 0$, e risolvendo si ottiene $x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$. Il valore positivo $+1$ riduce la funzione ad un massimo positivo, poichè sostituito dà $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{2}$, ed $y = \frac{1}{2}$.

Il valore negativo -1 sostituito da $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, ed $y = -\frac{1}{2}$; onde riduce la stessa funzione ad un massimo negativo.

Sia la frazione $y = \frac{2 - 3x + xx}{2 + 3 + xx}$.

Differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{-12 + 6xx}{(2 + 3x + xx)^2}$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{72 + 72x - 12x^2}{(2 + 3x + xx)^2}$. Quindi $\frac{-12 + 6xx}{(2 + 3x + xx)^2} = 0$, ed $x = \pm \sqrt{2}$.

Dal valore $+\sqrt{2}$ si ricava $\frac{dy}{dx} = \frac{72 + 48\sqrt{2}}{(4 + 3\sqrt{2})^2}$, ed $y = -0,0294$, massimo negativo. Dal valore $\sqrt{2}$ si ottiene $\frac{dy}{dx} = \frac{72 - 48\sqrt{2}}{(4 - 3\sqrt{2})^2}$, quantità negativa, poichè $72 > 48\sqrt{2}$, e $4 < 3\sqrt{2}$; Dunque $y = -33,971$ minimo negativo.

LXXXI.

Alla stessa maniera si potranno cercare tutti i massimi, e minimi possibili di una funzione della forma $(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \dots + M)^n$, qualunque sia l'esponente n . Mentre, eguagliando questa funzione ad y , e differenziando, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = n(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots + M)^{n-1}(mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \dots + P) = 0;$$

e quindi l'equazione $m x^{m-1} + \overline{m-1} A x^{m-2} + \overline{m-2} B x^{m-3} + \dots + P = 0$, le cui radici daranno tutti i massimi e minimi possibili.

LXXXII.

PROBLEMA 3.º *Data l'equazione ad una curva cercare a qual punto dell'asse corrisponda la massima o minima ordinata y , ed il di lei valore in questo punto.*

Sia la curva dell'equazione $y = (a+b) \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2x}$.

Differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{a} - \frac{a^2}{2x^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{x^3}$, e facendo $\frac{a+b}{a} - \frac{a^2}{2x^2} = 0$, si trova $x = \pm a \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$, il qual valore, sostituito nel secondo differenziale, dà $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{1}{2a \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}}}$; il segno superiore indica un minimo, e l'inferiore un massimo.

Dunque la curva ha un'ordinata minima positiva $= \frac{1}{2} \sqrt{a+ab}$, alla quale corrisponde l'ascissa $a \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$, ed un'ordinata massima negativa $= -\frac{1}{2} \sqrt{a+ab}$ corrispondente all'ascissa negativa $-a \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$.

Sia la curva un'Ellissi, od un circolo di genere superiore, la cui equazione differenziata si è (XLIX)

$$dy = \frac{1}{m+n} \left(n^{\overline{m-1}} \cdot \frac{a}{p} \right)^{\overline{m+n}} \frac{m \cdot a - x - nx}{ax - xx} dx;$$

Eguagliando a zero questo differenziale, e dividendo per $\frac{1}{m+n} \left(x^m \cdot a - n \cdot \frac{p}{a} \right) dx$ si avrà l'equazione $\frac{ma - mx - nx}{ax - xx} = 0$, dalla quale ricaverassi $x = \frac{na}{m+n}$.

Nell' ellissi e nel circolo comune, in cui $m=n=1$, farà $x = \frac{a}{2}$.

Dunque sostituendo questo valore, l'ordinata massima farà $\frac{1}{2} \sqrt{ap}$.

Ma nell' Ellissi $\frac{1}{2} \sqrt{ap}$ è il valore del semiasse conjugato, e nel circolo $p=a$. Dunque in ciascun d' essi farà $y = \frac{1}{2} a$. Cioè la massima ordinata nell' Ellissi corrisponderà alla metà dell' asse maggiore, e farà eguale all' asse minore, e nel circolo farà lo stesso suo raggio.

In un dato circolo sia $2a$, il diametro, x qualunque ascissa computata dal vertice, ed y l'ordinata corrispondente. Il diametro $2a$ sia ancora asse di una curva, di cui ciascun ordinata z sia media tralle corrispondenti coordinate al circolo x, y : determinare la massima ordinata in questa curva.

Nel circolo si ha $yy = 2ax - xx$, e nella curva $xx = xy$. Dunque differenziando la prima equazione farà $dy = \frac{adx - xdx}{y}$, e differenziando la seconda farà $dx = \frac{ydx + xdy}{2x}$, ovvero, sostituendo il valore di dy , e riducendo, $dx = \frac{y^2 dx + axdx - xdx}{2xy}$. Ma, a motivo della massima ordinata z , farà zero il valore di dx , cioè farà $\frac{y^2 dx + axdx - xdx}{2xy} = 0$. Dunque, moltiplicando ciascun membro per $2xy$, so-

Ritruendo invece di y il suo valore $2an - nn$, e liberando la n , farà $n = \frac{3a}{2}$.

Dunque la massima ordinata corrisponderà ai $\frac{3}{4}$ del diametro $2a$, e farà $\frac{a}{2} \sqrt[4]{27}$.

Sia finalmente la curva dell'equazione $ny = nn + aa$.

Differenziando si ha $dy = dn - \frac{a^2 dn}{n^2} = 0$, onde $n^2 - a^2 = 0$, ed $n = \pm a$.

Differenziando di nuovo per vedere a che corrisponda ciascuno di questi valori di n si ha $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{a^2}{n^3}$, cioè, mettendo il valore di n , $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm \frac{1}{a}$.

Dunque il segno superiore indica un minimo positivo, e l'inferiore un minimo negativo, perchè nel 1.º caso si ha $y = 2a$, e nel 2.º $y = -2a$.

LXXXIII.

PROBLEMA 4.º *Dividere una data quantità a in parti n per modo che il loro prodotto sia un massimo.*

Sia $n=2$, si chiami n una delle due parti; farà $a-n$ l'altra parte, ed $an - nn$ il prodotto loro. Il differenziale di questo prodotto nel caso del massimo deve essere zero. Dunque farà $adn - 2ndn = 0$; e risolvendo $n = \frac{1}{2}a$, ed $a-n = \frac{1}{2}a$.

Cioè la quantità a dovrà esser divisa in due parti eguali.

Sia $n=3$, e si chiami n la prima parte, y la seconda, $a-n-y$ la terza.

N 2

Sarà $xyx - x^2y - ny^2$ il prodotto di queste tre parti, ed $xydx + xdy - 2xydx - x^2dy - 2nydy - y^2dx$ il differenziale di questo prodotto.

Nel caso del massimo prodotto svanirà questo differenziale: dunque, eguagliando a zero la somma di tutti i termini, che contengono il differenziale della medesima variabile, si avranno le due equazioni

$$xydx - 2xydx - y^2dx = 0$$

$$x dy - x^2 dy - 2nydy = 0$$

Dalle quali si ricaveranno i tre valori $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}a$, $a - x - y = \frac{1}{3}a$.

Dunque la quantità x dovrà dividersi in tre parti eguali.

Sia $n = 4$, e siano le quattro parti $x, y, z, a - x - y - z$.

Il loro prodotto sarà $anyz - x^2yz - xy^2z - nyz^2$, ed il differenziale di questo prodotto

$$ayzdx + anzdy + anydz$$

$$- 2xyzdx - x^2zdy - x^2ydz$$

$$- y^2zdx - 2nzydy - ny^2dz$$

$$- yz^2dx - xz^2dy - 2nyzdz$$

Quindi eguagliando a zero le somme dei termini, che comprendono i differenziali delle stesse variabili, si avranno le tre seguenti equazioni

$$ayzdx - 2xyzdx - y^2zdx - yz^2dx = 0,$$

$$anzdy - x^2zdy - 2xyzdy - xz^2dy = 0,$$

$$anydz - x^2ydz - ny^2dz - 2nyzdz = 0,$$

Dalle quali si caverà $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}a$, $z = \frac{1}{4}a$, $a - x - y - z = \frac{1}{4}a$.

Dunque la quantità dovrà esser divisa in quattro parti eguali.

Se n sarà eguale a 5, a 6, a 7, ec., operando come finora si è fatto, si troverà che la quantità x dovrà dividersi in 5, in 6, in 7, ec. parti eguali.

LXXXIV.

PROBLEMA 5.^o *Dividere una data quantità a in parti n , per modo che, chiamando x, y, z, \dots ec. queste parti, il prodotto $x^m y^p z^q \dots$ ec. sia un massimo.*

Sia $n = 2$. Saranno le due parti $x, a - x$, ed il richiesto prodotto $x^m (a - x)^p$. Il differenziale di questo prodotto eguagliato a zero darà l'equazione $m x^{m-1} (a - x)^p dx - p x^m (a - x)^{p-1} dx = 0$; onde, dividendo pel fattore comune, e liberando la x , farà $x = \frac{am}{m+p}$, ed $a - x = a - \frac{am}{m+p} = \frac{ap}{m+p}$.

Sia $n = 3$. Saranno le 3 parti $x, y, a - x - y$, il prodotto cercato $x^m y^p (a - x - y)^q$, ed il differenziale di questo prodotto $m x^{m-1} y^p (a - x - y)^q dx + p x^m y^{p-1} (a - x - y)^q dy - q x^m y^p (a - x - y)^{q-1} dx - q x^m y^p (a - x - y)^{q-1} dy = 0$. Eguagliando a zero ciascuna somma di termini, che contengono lo stesso differenziale, si avranno le due equazioni $m x^{m-1} y^p (a - x - y)^q dx - q x^m y^p (a - x - y)^{q-1} dx = 0$, $p x^m y^{p-1} (a - x - y)^q dy - q x^m y^p (a - x - y)^{q-1} dy = 0$, dalle quali si avrà $x = \frac{ma - my}{m + q}$, ed $x = \frac{pa - py - qy}{p}$.

Questi due valori di x paragonati fra loro daranno $y = \frac{ap}{m + p + q}$; onde $x = \frac{am}{m + p + q}$, ed $a - x - y = \frac{aq}{m + p + q}$.

Sia $n = 4$. Le parti saranno $x, y, z, a - x - y - z$;

Quindi il cercato prodotto sarà $x^m y^p z^q (a - x - y - z)^r$, ed operando come si è fatto nei due esempi precedenti, e chiamando t la somma degli esponenti m, p, q, r , si troverà $x = \frac{am}{t}$, $y = \frac{ap}{t}$, $z = \frac{aq}{t}$, ed $a - x - y - z = \frac{ar}{t}$.

Cioè ciascuna parte farà eguale al prodotto di a nel suo esponente diviso per la somma di tutti gli esponenti, e le parti staranno nella ragione dei loro esponenti rispettivi.

Lo stesso si troverà per qualunque altro numero di parti. Se gli esponenti m, n, p, q, \dots ec. faranno tra loro eguali, ciascuna parte farà $\frac{1}{n} a$; cioè le parti x, y, z, \dots ec. faranno tutte eguali tra loro.

LXXXV.

PROBLEMA 6.° *Da un punto dato ovunque nel piano di una curva condurre alla stessa curva la retta più corta.*

Sia AM questa curva (Fig. 16.), ed AZ il suo asse.

1.° Il dato punto sia nell'asse AZ , siccome in Q , e sia M quel punto, in cui la retta cercata MQ deve incontrare la curva.

Dal punto M s'intenda abbassata all'asse la perpendicolare MP , e si faccia $AQ = a$, $AP = x$, $PM = y$,

$MQ = z$. Sarà $PQ = a - x$, $\overline{MQ} = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2$, ossia $z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, e differenziando $dz =$

$\frac{2ydy + 2xdx - 2adx}{2z} = 0$, poichè z deve essere un minimo.

Dunque $\frac{ydy}{dx} = a - x = PQ$; ma $\frac{ydy}{dx}$ è la formola della

fottonormale: dunque PQ è fottonormale, e la retta cercata MQ normale alla curva.

2.° Il punto sia nell' area della curva, e sia R .

Supposta la retta cercata MRQ , le RV , MP perpendicolari all' asse, e la NR parallela allo stesso asse, si faccia $AV = b$, $RV = NP = c$, ed $MR = x$; sarà $MN = y - c$, $RN = PV = b - x$, ed $\overline{MR} + \overline{MN} + \overline{NR}$, ossia $x^2 = y^2 - 2cy + c^2 + b^2 - 2bx + x^2$, il cui differenziale eguagliato a zero darà $dx = \frac{2ydy - 2cdy - 2bdx + 2x dx}{2x} = 0$,

quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{b-x}{y-c}$, ed $\frac{ydx}{dx} = \frac{(b-x)y}{y-c}$. Ma $MN:NR::MP:$

PQ , ovvero $y-c:b-x::y:PQ = \frac{(b-x)y}{y-c} = \frac{ydy}{dx}$.

Dunque MR è normale alla curva.

3.° Il punto sia fuori dell' area della curva, e sia S .

Abbassata all' asse la perpendicolare SB , e concepita la MO parallela all' asse si faccia $SB = c$, $AB = g$, $MO = BP = x - g$, $SO = c - y$, $SM = x$; sarà $x^2 = c^2 - 2cy + y^2 + x^2 - 2gx + g^2$; onde $dx =$

$\frac{2ydy - 2cdy + 2x dx - 2g dx}{2x} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x-g}{c-y}$, e $\frac{ydy}{dx} = \frac{(x-g)y}{c-y}$;

Ma $SO:OM::MP:PQ$. Dunque sostituendo i valori sarà $PQ = \frac{(x-g)y}{c-y} = \frac{ydy}{dx}$. Cioè la linea più corta sarà la normale SM , come ne' due casi precedenti.

Lo stesso si dimostra, quando il dato punto sia fuori dell' area della curva verso T .

LXXXVI.

PROBLEMA 7.° *Data la base di un triangolo ACB (Fig. 17), e la somma dei due lati sopra di essa determinare questi due lati in guisa, che il triangolo abbia la massima superficie.*

Si chiami b la base AB , a la somma dei due lati AC , BC , x il maggiore lato AC , $a - x$ l'altro lato BC , e si abbassi dal vertice C la perpendicolare CD sopra la base AB , prolungata se abbisogna.

E' proprietà d'ogni triangolo, che abbassata da uno dei tre angoli una perpendicolare CD sopra l'opposta base AB , questa stia alla somma degli altri due lati AC , BC nel rapporto della differenza dei medesimi due lati, alla differenza, od alla somma dei segmenti AD , BD formati dalla CD nella base AB , secondochè CD cade o dentro l'area del triangolo, o fuori di essa sulla base prolungata.

$$\text{Dunque si avrà } b : a :: 2x - a : AD \mp BD = \frac{2ax - aa}{b}, \text{ ossia}$$

$$2AD - AB = \frac{2ax - aa}{b}; \text{ quindi } AD = \frac{2ax - aa + bb}{2b}, \text{ e}$$

$$CD = \sqrt{\left(x^2 - \left(\frac{2ax - aa + bb}{2b}\right)^2\right)}.$$

Questo valore moltiplicato per $\frac{1}{2} b$ darà la superficie del Triangolo $ACB = \frac{b}{2} \left(x^2 - \left(\frac{2ax - aa + bb}{2b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, il cui differenziale eguagliato a zero per cagione del massimo darà l'equazione

$$\frac{1}{2} b \left(x^2 - \left(\frac{2ax - aa + bb}{2b}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2x dx - \left(\frac{2ax - aa + bb}{b}\right) adx\right)$$

$$= 0, \text{ ovvero } 2x dx - \left(\frac{2ax - a^2 + b^2}{bb} \right) x dx = 0, \text{ onde } x = \frac{1}{2} a, \text{ ed } a - x = \frac{1}{2} a.$$

Cioè il triangolo farà isoscele sopra la base AB , e ciascun lato farà eguale alla metà della data somma.

LXXXVII.

PROBLEMA 8.º Dato il perimetro di un triangolo determinare i tre lati della massima superficie.

Pel problema precedente il triangolo farà isoscele.

Si chiami adunque p il dato perimetro, x la base AB (Fig. 18.), e s' intenda abbassata la perpendicolare CD .

$$\text{Sarà } AC, \text{ ovvero } BC = \frac{p-x}{2}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{p^2 - 2px + x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 - 2px)}$$

$$\Delta^{\circ} . ACB = \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 x^2 - 2px^3)}.$$

Il differenziale di questa superficie eguagliato a zero

$$\text{darà } \frac{(2p^2 x - 6px^2) dx}{8(p^2 x^2 - 2px^3)^{\frac{1}{2}}} = 0; \text{ oppure } 2p^2 x - 6px^2 = 0, \text{ e}$$

$$\text{quindi } x = \frac{1}{3} p, \text{ e } \frac{p-x}{2} = \frac{1}{2} p.$$

Dunque il triangolo farà equilatero, cioè questi tra tutti i triangoli isoperimetri avrà la massima superficie (*).

O

(*) Figure isoperimetre diconsi quelle, che hanno perimetri eguali.

PROBLEMA 9.° *Dato il perimetro di un quadrilatero determinare i lati, cosicchè la superficie sia un massimo, ovvero tra gli infiniti quadrilateri isoperimetri determinare quegli della maggior superficie.*

Sia $ABCD$ (Fig. 19.) un quadrilatero, ed in esso siano condotte le due diagonali AC , BD .

Pel problema 7.° è manifesto, che ciascuno dei due triangoli ADC , ABC , nei quali si risolve il quadrilatero $ADCB$ dalla diagonale AC , avrà la maggior superficie, quando sia isoscele sopra la stessa AC , cioè quando sia $AB = BC$, ed $AD = DC$.

Parimente i due triangoli BAD , BCD avranno la massima superficie quando $AB = AD$, e $BC = DC$.

Dunque il quadrilatero della massima superficie avrà tutti i lati eguali: cioè sarà un rombo.

Sia in oltre abbassata la perpendicolare DE sopra il lato AB ; si chiami a questo lato, ed x la parte AE compresa tra DE , e l'angolo A . Sarà $\sqrt{a^2 - x^2}$ il valore della perpendicolare DE , e $a\sqrt{a^2 - x^2}$ la superficie del parallelogrammo,

— $\frac{axdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$ il suo differenziale eguagliato a zero, e quindi $x = 0$; dunque la perpendicolare DE coinciderà col lato AD , l'angolo in A sarà retto, e conseguentemente ciascuno degli altri tre B , C , D .

Dunque tra tutti i quadrilateri d'equal perimetro il quadrato ha la massima superficie.

In simil guisa si può dimostrare, che tra tutti i pentagoni, esagoni, eptagoni, e generalmente tra tutte le figure

isoperimetre d' egual numero di lati, la regolare si è quella, che racchiude maggior superficie.

LXXXIX.

PROBLEMA 10.^o *Tra le infinite figure regolari isoperimetre determinare quella della massima superficie.*

Si chiami n il lato MN della figura regolare cercata (Fig. 20.), p il suo perimetro, sia MNQ il circolo ad essa circoscritto, C il suo centro, CM , CN i due raggi condotti all' estremità del lato MN , e CP l' altezza del triangolo MCN .

Sarà $\frac{p}{n}$ il numero dei lati della figura regolare cercata, $CP = \sqrt{CM^2 - MP^2} = \sqrt{r^2 - \frac{n^2}{4}}$ l' altezza del triangolo MCN , $\frac{1}{2} CP \cdot MN \cdot \frac{p}{n} = \frac{1}{2} p \sqrt{r^2 - \frac{n^2}{4}}$ la superficie del poligono, $-\frac{pn}{8\sqrt{r^2 - \frac{n^2}{4}}}$ il differenziale di questa superficie.

Questo differenziale eguagliato a Zero darà $n = 0$, e perciò $\frac{p}{n} = \infty$, e $CP = r$. Dunque la figura regolare cercata avrà il lato infinitamente piccolo, un numero infinito di lati, e la perpendicolare CP eguale al raggio del circolo circoscritto: dunque essa sarà questo stesso circolo; cioè questi è tra le infinite figure regolari isoperimetre quella, che racchiude maggior superficie (*).

O 2

(*) Volendo paragonare insieme le aree degli infiniti poligoni regolari isoperimetri, si chiami n il numero de' lati di un poligono regolare qualunque; S la di lui superficie, e p il costante perimetro.

LXXXX.

PROBLEMA 11.° Sia AB una retta data (Fig. 21.), ed MN una retta indefinita di data posizione rispetto alla AB , cercare nella MN un punto C , dal quale condotte le due rette CA, CB alle estremità della AB , la somma $CA+CB$ sia un minimo.

Dalle estremità A, B , della AB si menino alla MN le due perpendicolari AD, BE , le quali insieme colla DE , per esser conosciuta la posizione della MN rispetto alla AB , faranno date. Si faccia $DE = n$, $AD = b$, $BE = c$, $DC = x$, e $CE = a - x$; farà $AC = \sqrt{b^2 + x^2}$, $BC = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ax + x^2}$, ed $AC + BC = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - 2ax + x^2}$.

Dunque differenziando questa somma, ed eguagliando a zero, si avrà $\frac{2xdx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{2xdx - 2adx}{\sqrt{c^2 + a^2 - 2ax + x^2}} = 0$.

Sarà $CP = \text{Cof. } MCP = \text{Cof. } \left(\frac{360^\circ}{2n}\right) = \text{Cof. } \left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ed $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } \left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.

Se la figura regolare è un Δ equilatero farà $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } 60^\circ = 250000 p$.

Se un quadrato $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } 45^\circ = 3535534 p$.

Se un pentagono $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } 36^\circ = 4014087 p$.

Se un esagono $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } 30^\circ = 4308146 p$.

Se un Circolo farà $S = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } \left(\frac{180^\circ}{\infty}\right) = \frac{1}{2} p \cdot \text{Cof. } 0^\circ = \frac{1}{2} p \cdot r = 500000 p$.

Dunque tralle infinite figure regolari isoperimetre il Δ equilatero ha la minima superficie, il circolo ha la massima, e delle altre figure quella ha maggior superficie, che ha un maggior numero di lati, e viceversa.

Riducendo, e levando i radicali.

$$\frac{x^2}{x^2 + a^2} - \frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 + a^2 - 2ax + a^2} = 0.$$

Togliendo le frazioni, ed ordinando per x

$$(c^2 - b^2)x^2 + 2ab^2x - a^2b^2 = 0.$$

E finalmente completando l'equazione e risolvendo.

$$x = -\frac{ab^2}{c^2 - b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2 - b^2} + \frac{a^2b^2}{(c^2 - b^2)^2}\right)}$$

valore che corrisponde al minimo cercato.

LXXXXI.

COROLLARIO. Se MN sarà parallela alla retta AB , farà $AD = BE$, ossia $b = c$, e l'equazione ordinata $(c^2 - b^2)x^2 + 2ab^2x - a^2b^2 = 0$, ridurrassi a $2ab^2x - a^2b^2 = 0$, e quindi si avrà $x = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}DE$; cioè il triangolo ACB sarà isoscele sopra AB .

LXXXXII.

PROBLEMA 12.º Nell'area del triangolo ABC (Fig. 22) siavi un punto D , dal quale condotte ai tre angoli le tre rette AD , BD , CD , la somma $AD + BD + CD$ sia un minimo, determinare gli angoli formati da queste rette intorno al punto D .

Col centro B , e raggio BD s' intenda descritto l'arco di circolo EDH , di cui DH sia una porzione infinitesima, e da H siano abbassate le perpendicolari HG , HI alle due rette DA , DC .

Si faccia $DA = x$, $BD = y$, $DC = z$, farà $x + y + z$ il minimo cercato, il cui differenziale, supponendo costante il raggio $DB = y$, farà $dx + dz = 0$, onde $dx = -dz$.

Dunque riguardando DG , DI come i differenziali rispettivi di DA , DC , e l'infinitesima DH come una linea retta

perpendicolare in D a DB , farà $DG = DI$, poichè $dx = -dz$, non considerando la diversità dei segni, ed il triangolo DHI in tutto eguale al triangolo DHG , quindi angol. $HDI = HDG$. Ma sono ancora tra loro eguali i due angoli retti BDH , s , e i due verticali HDG , s : dunque farà $\text{Ang. } ADB = s + s = BDH + HDG = BDH + HDI = BDC$.

Similmente se col centro A e raggio AD si supporrà descritto un altro arco di circolo, si troverà angol. $ADB = ADC$. Dunque i tre angoli intorno al punto D debbono essere eguali tra loro, e ciascuno a 120° .

Il problema non avrebbe luogo se alcuno dei tre angoli del triangolo fosse o eguale, o maggiore di 120° .

LXXXIII.

PROBLEMA 13.° *Assegnare le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, il quale sotto una data superficie comprenda la massima solidità.*

Si chiami x l'altezza del solido, y , z i lati della base; farà la di lui superficie $2xy + 2xz + 2yz$, e la solidità xyz .

La prima deve essere costante, e la seconda un massimo; dunque, supponendo costante l'altezza x , farà il differenziale della superficie $2xdy + 2xdz + 2ydz + 2zdy = 0$, e quello della solidità $xydz + xzdy = 0$.

Dal primo differenziale si ottiene $\frac{dy}{dz} = \frac{-x-y}{x+z}$.

Dal secondo $\frac{dy}{dz} = -\frac{y}{z}$.

ed eguagliando questi due valori si avrà $\frac{-x-y}{x+z} = -\frac{y}{z}$,

e quindi $x = y$; dunque nella posizione che l'altezza x sia costante, la base del solido farà un quadrato.

Si faccia ora variare anche l'altezza n , e si ponga $y = z$. La superficie del parallelepipedo sarà $4xy + 2y^2$, e la solidità xy^2 .

Il differenziale di quella $4x dy + 4y dx + 4y dy = 0$.

Il differenziale di questa $y^2 dx + 2xy dy = 0$.

Dal primo si ottiene $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+y}$.

Dal secondo. $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$.

Quindi sarà $\frac{-y}{x+y} = \frac{-y}{2x}$, ed $x = y$; ma $y = z$; dunque $x = y = z$; cioè il solido richiesto sarà un cubo.

LXXXXIV.

COROLLARIO. Tra gli infiniti parallelepipedi d'ugual superficie il cubo ha la massima solidità; e viceversa tra gli infiniti parallelepipedi d'eguale solidità il cubo ha la minima superficie.

Allo stesso modo si potrà determinare quale tra gli infiniti Prismi, Cilindri, Piramidi, o Coni retti d'ugual superficie abbia la massima solidità, e viceversa quale tra gli infiniti Prismi, Cilindri, Piramidi, o Coni retti d'eguale solidità abbia la minima superficie.

LXXXXV.

PROBLEMA 14° Sia AB (Fig. 23.) il diametro alla base di un cono retto troncato parallelamente alla stessa base, e CG l'altezza, determinare il diametro EF della sezione per modo, che la superficie convessa del cono troncato sia un massimo.

Si chiami a l'altezza CG del Cono, b il raggio AC

della base, x il raggio GE della sezione, e si conduca la EH parallela a CG . Sarà $AE = \sqrt{EH^2 + AH^2} = \sqrt{b^2 - 2bx + x^2 + a^2}$, e, prendendo il rapporto del raggio alla circonferenza $1 : c$, farà bc la circonferenza della base AB , e cx quella della sezione EF .

Nel cono retto troncato parallelamente alla base la superficie convessa è eguale al prodotto del lato AE nella semisomma delle circonferenze descritte dai raggi AC , EG delle opposte basi. Dunque questa superficie sarà

$$\frac{cx + bc}{2} \sqrt{b^2 - 2bx + x^2 + a^2}, \text{ ed il suo differenziale}$$

$$\frac{cx + bc}{2} \left(\frac{-b + x}{\sqrt{b^2 - 2bx + x^2 + a^2}} \right) dx + \sqrt{b^2 - 2bx + x^2 + a^2} \frac{cdx}{2}.$$

Questi, a motivo del massimo posto eguale a zero, darà l'equazione $x^2 - bx + \frac{a^2}{2} = 0$, dalla quale si avrà $x = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 2a^2}$.

LXXXV.

PROBLEMA 15.^o *Con un piano tagliare il cono retto ACB (Fig. 24.) in guisa, che la nascente sezione MEM sia una parabola della più gran superficie.*

Si chiami x l'Ascissa AP , p il diametro AB della base, b il lato AC del cono.

Per la proprietà del circolo sarà $PM = \sqrt{ax - xx}$, e pel parallelismo dell'asse della parabola PE col lato AC del cono $AB : BP = AC : PE = \frac{BP \cdot AC}{AB} = \frac{xb - bx}{a}$, onde la

superficie della parabola MEM sarà $\frac{1}{2} \sqrt{ax - xx} \left(\frac{ab - bx}{a} \right)$,
quale

quale dovendo esser massima darà l'equazione differenziale

$$-\frac{2b}{3a}(ax - xx)^{\frac{1}{3}}dx + \frac{1}{3}\left(\frac{ah - bx}{a}\right)(ax - xx)^{-\frac{1}{3}} \cdot (adx - 2x dx)$$

$= 0$, cioè riducendo ed insieme ordinando per x si avrà l'equa-

$$\text{zione: } x^3 - \frac{5ax}{4} - \frac{a^2}{4} = 0, \text{ e risolvendo } x = \frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}a.$$

Il segno positivo è inutile, poichè dà $x = a$, il negativo dà $x = \frac{1}{4}a$, e dinota che la parabola della massima superficie passerà per la quarta parte dell'asse AB , facendo origine al vertice A , cioè prendendo $AP = \frac{1}{4}AB$, e $CE = \frac{1}{4}BC$.

LXXXVII.

PROBLEMA 16.º *Tra gli infiniti Coni, che si possono inscrivere in una data sfera, determinare quegli della massima superficie convessa, e della massima solidità.*

Sia AMB (Fig. 25.) il semicircolo genitore della sfera, AMP il triangolo che rivolgendosi intorno ad AP deve generare il cono proposto. Si chiami a il diametro AB , $1 : c$ il rapporto del raggio alla circonferenza del circolo, ed x l'ascissa AP . Sarà $\sqrt{(ax - xx)}$ il valore della ordinata MP , $\sqrt{(ax)}$ quello del lato AM , e $c\sqrt{(ax - xx)}$ la periferia descritta dalla stessa MP , ossia il perimetro alla base del cono, $c\sqrt{(ax - xx)} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(ax - xx)} = \frac{c}{2}(ax - xx)$ la superficie della stessa base.

$$\text{Quindi } \sqrt{ax} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{(ax - xx)} = \frac{c}{2}\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)} \text{ la}$$

superficie convessa del cono, e $\frac{c}{2}(ax - xx) \cdot \frac{x}{3} = \frac{c}{6}(ax^2 - x^3)$ la sua solidità.

Ma ciascuna di queste due funzioni debb' essere un massimo, dunque differenziando, ed eguagliando a zero si avrà per la prima $\frac{2a^2 cndx - 3acx^2 dx}{4\sqrt{(a^2 x^2 - ax^2)}} = 0$, e perciò $x = \frac{2}{3}a$, e per la seconda $\frac{2}{3}acndn - \frac{2}{3}cn^2 dn = 0$, onde $x = \frac{2}{3}a$.

Dunque il cono ricercato avrà per altezza i $\frac{2}{3}$ dell' asse della sfera.

LXXXXVIII.

PROBLEMA 17.^o *In una data Ellipsoide inscrivere il cilindro della più gran superficie convessa.*

L' Ellipsoide s' intenda generata dalla rotazione della semiellissi DAE (Fig. 26.) intorno il minor asse DE , e sia $MmnN$ la sezione del proposto cilindro, Mm il suo lato, C il centro dell' Ellissi ec. Si faccia $AB = 2a$, $PC = x$, $MP = y$, 1 : c il rapporto del raggio alla periferia del circolo. Sarà $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$ l' equazione all' Ellissi, cx la periferia descritta da $PC = mq$, ossia il perimetro alla base del cilindro, $2y \cdot cx = \frac{2bcx}{a} \sqrt{(aa - xx)}$ la superficie convessa dello stesso cilindro. Differenziando questa superficie, ed eguagliando a zero si avrà $\frac{2bc}{a} \sqrt{(aa - xx)} dx - \frac{2bcx dx}{a\sqrt{(aa - xx)}} = 0$, onde $xx = \frac{1}{2} aa$, $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$, ed $y = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{aa}{2}} = \sqrt{\frac{bb}{2}}$.

Dunque PC farà media proporzionale tra AC , e $\frac{1}{2} AC$, e PM media tra CD e $\frac{1}{2} CD$.


IC.

COROLLARIO. Se l' Ellissi degenerasse in un circolo, farebbe $a = b$, onde $x = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$; cioè il diametro del cilindro eguaglierebbe la sua altezza.

CAPO NONO.

DELLE EVOLUTE, E DE' RAGGI OSCULATORI NELLE CURVE.

C.

 **A**L vertice B di una qualunque curva BC (Fig. 27.) sia applicata una tangente indefinita AD , la quale movendosi soltanto intorno alla curva in guisa di rimaner sempre tangente in qualche di lei punto C , descriva colla sua estremità A l'altra curva AMN .

La curva BC , alla quale è applicata la tangente AD , chiamasi *Evoluta*, *Sviluppata*, o *Curva generante*.

La curva AMN descritta dal punto A la *Generata*, e qualunque parte MC della tangente compresa tra la generata, ed il punto del contatto C , *Raggio Osculatore*, *Raggio di Curvatura*, o della *Sviluppata*.

CI.

Le proprietà di questo raggio osculatore sono

1.° Che egli è sempre eguale alla costante porzione di tangente AB più l'arco BC della sviluppata compreso tra l'origine B ed il punto del contatto C .

2.° Che è perpendicolare alla generata in ciascun punto M , nel quale ritrovasi la sua estremità A ; poichè la tangente al circolo essendo perpendicolare al raggio tirato dal punto del contatto, e ciascun archetto infinitesimo MM' descritto da CM nel passare dallo stato CM all'infinitamente prossimo $C'M'$ potendosi riguardare come un archetto di circolo di raggio CM e centro C , lo stesso raggio MC

farà perpendicolare alla tangente MT nel punto M della generata, cioè all' archetto infinitesimo MM' della stessa generata.

3.° Che serve a misurare la curvatura in ciascun punto della generata; poichè se alle due estremità M, M' di un archetto infinitesimo MM' si condurranno due perpendicolari $MC, M'C$, queste s'incontreranno in alcun punto C della sviluppata, e si potrà riguardare l' archetto MM' come un arco di circolo descritto dal centro C , e però la curva ed il circolo avranno nell' archetto MM' una comune curvatura. Ma il raggio è quegli, che determina la curvatura del suo circolo: dunque il raggio osculatore determina la curvatura in ciascun punto della generata. Il circolo, di cui MC è raggio, si chiama *Circolo Osculatore*.

CH

Da quest' ultima proprietà del raggio osculatore si inferisce, che, essendo le curvature de' circoli nella ragione inversa dei loro raggi, poichè i circoli sono tanto meno incurvati, quanto più grandi sono i raggi loro, e viceversa, le curvature della generata in due diversi punti del suo perimetro staranno nella ragione inversa de' loro raggi osculatori. Così la maggior curvatura è all' origine A dove il raggio osculatore è il più piccolo, e la minore dove il raggio osculatore è il più grande: la generata è tanto più incurvata, quanto più si approssima all' origine A , e tanto meno incurvata, quanto più si discosta da questa origine. Se il raggio osculatore diventa un minimo, la curvatura diventa un massimo, ed all' opposto questa si fa minima, quando quello si fa massimo. Dove il primo svanisce, la seconda diventa infinita, e dove quello diventa infinito sva-

nisce la curvatura; cioè al raggio zero corrisponde l'evanescenza di un arco, e diventando infinito il raggio osculatore, l'arco della curva degenera in una linea retta.

CIII.

Sia Mm un arco qualunque di curva (Fig. 28.), MC , mc due perpendicolari o raggi osculatori alle estremità di quest'arco, che s'incontrano in qualche punto C .

L'angolo MCm formato da questi due raggi in C si chiama *angolo di curvatura dell'arco MN* . In M ed m siano condotte alla curva le due tangenti MP , mO , che incontrandosi in qualche punto O dalla parte convessa della curva formeranno l'angolo esteriore $POm =$ all'angolo C ; poichè essendo retti gli angoli in M ed m formati dalle tangenti co' raggi osculatori, farà ang. $MCm + MOm = 180^\circ = MOm + POm$, e levando l'angolo comune MOm , farà ang. $MCm = POm$. Cioè l'angolo di curvatura di un dato arco di curva è eguale all'angolo formato esteriormente dalle due tangenti condotte all'estremità di quest'arco. Se l'arco Mm farà infinitamente piccolo, si potrà riguardare come un arco circolare di raggio MC e centro C , onde condotta la corda Mm per la proprietà del circolo farà Ang. MCm , ossia POm doppio dell'angolo OMm , ed il triangolo MOm isoscele sopra la base Mm .

Sulla curva si prenda un altro arco Nn eguale al primo Mm , all'estremità di Nn si menino i raggi osculatori ND , nD , e siano diverse le curvature nei due archi infinitesimi Mm , Nn . I due raggi ND , nD faranno diversi dai due MC , mc , l'angolo D farà diverso dall'angolo C , ed i valori di questi due angoli D , C , per ciò che si è detto faranno

reciprocamente proporzionali ai raggi MC , ND . Dunque le curvature in due diversi punti di una curva saranno reciprocamente proporzionali ai raggi osculatori in questi punti.

CIV.

PROBLEMA I.° Cercare una formola generale esprimente il valore del raggio osculatore, co-raggio, ec. per ciascun punto di una data curva.

Se la curva è riferita ad un asse AR (Fig. 29.) siano MC , mC due raggi osculatori infinitamente prossimi, MP , mp le corrispondenti ordinate, Mr una parallela all'asse, e dal punto N siano condotte le NE , NL , la prima perpendicolare, e la seconda parallela al raggio mC .

Dai triangoli simili MNL , MCm si ha

$$Mm:MC::ML:MN$$

$$\text{ossia } Mm:MC::Mm - NE:MN$$

$$\text{onde } NE = \frac{(MC - MN) Mm}{CM},$$

e dagli altri due triangoli Mrm , NEn

$$Mm:Mr::Nn:NE = \frac{Mr \cdot Nn}{Mm};$$

ed eguagliando tra loro questi due valori di NE , ed elimi-

$$\text{nando il raggio osculatore si troverà } MC = \frac{MN \cdot \overline{Mm}}{Mm - Mr \cdot Nn}.$$

$$\text{Ma } Mr = dx, nr = dy, MN \text{ (normale alla curva)} = \frac{yds}{dx},$$

$$PN \text{ (sottonormale)} = \frac{ydy}{dx}, Nn = d(AN) = d(AP + PN)$$

$$= d\left(n + \frac{ydy}{dx}\right) = dx + \frac{ydxddy + dndy^2 - ydyddx}{dx^2}, \text{ ed } Mm = ds$$

Dunque rimettendo tutti questi valori farà $MC =$

$$\frac{yds}{dxds - dx^2 \left(dx + \frac{ydx dy + dx dy^2 - ydyddx}{dx^2} \right)}. \text{ Oppure, sostituendo}$$

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ in luogo di ds , e riducendo i termini del-

$$\text{la frazione, farà } MC = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{1}{2}}}{dyddx - dxddy}.$$

Dall'estremità C del raggio osculatore si abbassi all'ordinata MP prolungata la perpendicolare CQ ; la parte MQ , dell'ordinata compresa tra l'origine M ed il punto d'incidenza Q dicefi *Co-raggio Osculatore*. Il valore di questa retta, quando sia dato il raggio MC , si determina per mezzo dei triangoli simili MCQ , MNP , nei quali si ha $MN:MP::$

$$MC:MQ = \frac{MP \cdot MC}{MN} = \frac{dx(dy^2 + dx^2)}{dyddx - dxddy}.$$

$$\text{Pe' medesimi triangoli si ha ancora } QC = \frac{dy(dy^2 + dx^2)}{dyddx - dxddy}.$$

Si chiami q la misura dell'angolo di curvatura MCm , e si faccia il raggio eguale all'unità, farà $MC : 1 ::$

$$(Mm = ds):q = \frac{ds}{CM} = \frac{ds(dyddx - dxddy)}{(dy^2 + dx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dyddx - dxddy}{ds}.$$

Se le ordinate parallele fanno coll'asse della curva un dato angolo, si avranno le medesime formole di MC , MQ , e QC , coll'abbassare dalle estremità de' due raggi osculatori infinitamente prossimi due perpendicolari all'asse, e coll'assumer queste in luogo delle corrispondenti ordinate.

Se la curva è riferita ad un foco P (Fig. 30.), siano PM , Pm due ordinate infinitamente prossime, col centro P e raggio PM si descriva l'archetto circolare Mr , da P si ab-

bassino le perpendicolari PT , Pt ai due raggi osculatori MC , mC , e dal punto d'incontro N si conduca Nn parallela ad mC .

I due triangoli Mmr , PMT sono simili, poichè $\text{Ang. } PMr = TMm = 90^\circ$, $PMr - TMr = TMm - TMr$, ossia $PMT = rMm$, ed $\text{Ang. } T = r = 90^\circ$. Dunque sarà

$$Mm : Mr :: PM : MT = MN = \frac{PM \cdot Mr}{Mm}.$$

$$Mm : mr :: PM : PT = PN = \frac{PM \cdot mr}{Mm}.$$

Ma gli altri due triangoli MNn , MCm danno $Mn : MN :: Mm : MC$, cioè $Mm - Nt : \frac{PM \cdot Mr}{Mm} : Mm : MC$; dunque $MC = \frac{PM \cdot Mr}{Mm - Nt}$.

Si faccia $PM = y$, ed $Mr = dx$, sarà $mr = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

$$MN = \frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, PN = \frac{y dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}, Nt = d(PN) =$$

$$d \frac{y dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{(dx^2 + dy^2)(yddy + dy^2) - ydy(dx ddx + dy ddy)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{ed } Mm - Nt = \frac{dx^2(dx^2 + dy^2 - yddy) + ydy dx ddx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sostituendo quindi questi valori sarà

$$MC = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx^2 + dx dy^2 - y dx ddy + y dy ddx}, \text{ ed abbassando da } C$$

perpendicolarmente ad MP la CQ per la simiglianza de' triangoli rettangoli MNP , MQC si avrà $MP : MN :: MC : MQ$

$$= \frac{MC \cdot MN}{MP}; \text{ cioè surrogati i valori di } MC, MN \text{ ed } MP \text{ sarà}$$

$$MQ = \frac{y dx (dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dx dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}.$$

$$QC = \frac{y dy (dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dx dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}.$$

$$q = \frac{ds}{MC} = \frac{dx ds^2 - y dx ddy + y dy ddx}{y ds^2}.$$

Questa

CV.

Queste formole divengono più semplici, qualora si supponga costante alcuna delle tre differenze dx , dy , ds . Ordinariamente fassi costante la dx , cioè $ddx = 0$, e quindi

$$\left. \begin{aligned} MC &= \frac{-(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dxddy} = \frac{-ds^2}{dxddy} \\ MQ &= \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{-ds^2}{ddy} \\ QC &= -\frac{dyds^2}{dxddy}, \text{ e } q = -\frac{dxddy}{ds^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Per le curve riferite} \\ \text{ad un asse.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} MC &= \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx^2 + dx^2dy^2 - ydxddy} = \frac{yds^2}{dxds^2 - ydxddy} \\ MQ &= \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 - yddy} = \frac{yds^2}{ds^2 - yddy} \\ QC &= \frac{ydy(dx^2 + dy^2)}{dx(dx^2 + dy^2 - yddy)}, q = -\frac{dxddy}{ds^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Per le curve} \\ \text{riferite ad} \\ \text{un foco.} \end{array}$$

Oppure, chiamando n la normale alla curva, la cui espressione generale è $\frac{yds}{dx}$, e sostituendo, si ha per le prime tre formole

$$MC = \frac{-n^2 dx^2}{y^2 ddy}; MQ = \frac{-n^2 dx^2}{y^2 ddy}; QC = -\frac{n^2 dx^2}{y^2 ddy}.$$

Per le ultime

$$MC = \frac{n^2 dx^2}{n^2 dx^2 - y^2 ddy}; MQ = \frac{n^2 yds^2}{n^2 dx^2 - y^2 ddy}; QC = \frac{n^2 yds^2}{n^2 dx^2 - y^2 ddx}.$$

CVI.

Ad applicare ciascuna di queste formole al caso di una data curva, si differenzj due volte la di lei equazione, affine di avere i valori di dx , e ddx dati per y , e dy , oppure quelli di dy , e ddy dati per n , e dx , e questi valori si sostituiscano in ciascuna di quelle formole generali. Ciò fatto si avranno i valori delle rette MC , MQ , QC ec. in termini finiti.

Q

La curva rivolgerà la sua concavità o convessità alla linea delle ascisse, secondochè il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sortirà dal calcolo o positivo, o negativo; poichè in qualunque curva il raggio e co-raggio osculatore sono posti dalla parte concava, e nelle esposte formole generali, per cui si è supposta una curva concava all'asse, i valori di quelle due rette si sono assunti per positivi.

CVII.

Con un poco d'artificio si possono evitare le differenze seconde nelle formole del raggio osculatore, co-raggio... ec.

Sia AM (Fig. 31.) una curva riferita ad un'asse AP , MC , mc due raggi osculatori infinitamente prossimi, MP , mp le corrispondenti ordinate. Sulla prima di queste MP si prenda la parte MN eguale ad una costante arbitraria, dal punto M si abbassi perpendicolarmente ad MC la NT , e dal punto O , in cui NT incontra l'ordinata mp , si conduca OV perpendicolare all'altro raggio osculatore mc , e finalmente si tiri MS parallela ad AP .

Per la costruzione faranno simili i due triangoli MSm MTM , poichè gli angoli S , T sono retti, ed essendo pure retti i due mMC , SMP , levato da ciascun d'essi l'angolo comune SMT , faranno eguali tra loro i due angoli mMS , TMN .

In oltre, supponendo retto l'angolo in m formato dal raggio osculatore MC coll'archetto infinitesimo Mm , faranno ancora simili per ordine i tre triangoli rettangoli OTI , ICV , MCm .

Si faccia adunque $AP = x$, $PM = y$, $MN = b$, $MT = z$, farà $MS = dx$, $mS = dy$, $TI = dz$. Dai due triango-

goli MSm , MNT si avrà $Mm \cdot NT = mS \cdot MN$, e dai due OTI , MCm , $Mm \cdot OT = MC \cdot TI$. Onde, prendendo NT , OT per eguali, giacchè i punti O , N sono infinitamente prossimi, ed eguagliando farà $mS \cdot MN = MC \cdot TI$, e quindi $MC = \frac{mS \cdot MN}{TI} = \frac{b dy}{ds}$.

Ma i due primi triangoli MSm , MNT danno ancora $MT = \frac{MN \cdot MS}{Mm}$, cioè $z = \frac{b dx}{ds}$. Dunque se col mezzo dell' equazione alla curva si determinerà questo valore di z , differenziando si avrà quello pure di dz , il quale posto a denominatore della formola precedente invece della stessa dx , darà il valore di MC in termini finiti.

Alla stessa maniera si potrà ritrovare la formola pel co-raggio, e quelle pel raggio osculatore, e co-raggio nelle curve riferite ad un foco.

CVIII.

Data l' equazione alla generata col valore del raggio osculatore per qualunque di lei punto è cosa facile il determinare l' Equazione alla sviluppata. Dal punto C dell' Evoluta (Fig. 29.) si abbassino le due perpendicolari CR , CS , la prima all' asse AR della generata, la seconda all' asse BS della stessa evoluta, e si prolunghi quest' ultima fino ad incontrare in Q l' ordinata MP , prolungata se abbisogna. Dai triangoli simili Mrm , MQC si avrà

1.° $Mm : Mr :: MC : MQ = \frac{MC \cdot Mr}{Mm} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, facendo costante per brevità di calcolo la dx ; onde $BS = PQ = MQ - MP = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$, valore dell' ascissa BS all' evoluta.

Q 2

2.° $Mm : mr :: MC : CQ$, ossia $PR = \frac{MC \cdot mr}{Mm} = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$, e quindi $CS = BR = AP + PR - AB = x + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy} - a$, valore dell' ordinata CS alla medesima evoluta.

Questi due valori combinati colla equazione della generata AM daranno quella della sviluppata BC .

CIX.

PROBLEMA 2.° *Determinare il Raggio del circolo osculatore in ciascuna delle quattro sezioni Coniche.*

Dall' equazione a queste curve $y^2 = px \pm \frac{p^{xx}}{a}$, facendo costante dx , si ha $ydy = \frac{pdx}{2} \mp \frac{pxdx}{a}$

$$yddy + dy^3 = \mp \frac{pdx^2}{a}$$

$$y^3 ddy = \mp \frac{py^3 dx^2}{a} - y^3 dy^3$$

e, sostituendo i valori di y^3 e dy^3 ,

$$y^3 ddy = \mp \left(\frac{p^3 x}{a} \mp \frac{p^3 xx}{a^2} \right) dx^2 - \left(\frac{p}{2} \mp \frac{px}{a} \right)^2 dx^2 = -$$

$$\frac{p^3 dx^2}{4}, \text{ ed } MC = \frac{n^3}{\frac{1}{4} p^3}; \text{ dunque il raggio osculatore in cias-}$$

cuna sezione conica ordinaria è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato della metà del parametro.

CX.

COROLLARIO 1.° All'origine della curva, in cui $n=0$, si ha $n = \frac{1}{2} p$, ed $MC = \frac{1}{2} p$; cioè il raggio dell'evoluta in questo punto è eguale alla metà del parametro.

CXI.

COROLLARIO 2.° Nel circolo il raggio di curvatura è lo stesso raggio, e l'evoluta è il suo medesimo centro; poichè essendo $p = a$, farà $n = \frac{1}{2} a$, ed $MC = \frac{1}{2} a$.

CXII.

PROBLEMA 3.° Determinare la sviluppata nella parabola ordinaria.

In questa curva si ha $dy = \frac{p dx}{2\sqrt{px}}$, e $ddy = -\frac{p^2 dx^2}{4(px)^{3/2}}$;

dunque, sostituendo questi valori nelle generali espressioni delle coordinate BS, SC all'evoluta, si avrà BS =

$$\frac{dx^2 + \frac{p^2 dx^2}{4px}}{\frac{p^2 dx^2}{4\sqrt{(px)^3}}} - \sqrt{pn} = \frac{4x}{p} \sqrt{(pn)}, \text{ ed } SC = n +$$

$$\frac{\frac{p dx}{2\sqrt{px}} \left(dx^2 + \frac{p^2 dx^2}{4px} \right)}{\frac{p^2 dx^2}{4\sqrt{(px)^3}}} - n = 3n + \frac{p}{2} - n, \text{ ovvero, siccome } a$$

è il raggio osculatore all'estremità della parabola, il quale è eguale alla metà del parametro, farà $SC = 3n$.

Dunque, se si chiamerà z l'ascissa BS , ed v l'ordinata SC , farà $u = \frac{1}{1} v$, e $z = \frac{4v}{3p} \sqrt{\frac{1}{1} pv}$. Quindi $z^2 = \frac{16}{27} pv$, ed $v = \frac{27}{16} pz^2$, equazione alla seconda parabola cubica. *Dunque la sviluppata alla parabola ordinaria è una seconda parabola cubica, che ha per parametro $\frac{27}{16}$ del parametro della proposta.*

Per descrivere questa curva, sopra l'asse ABR si prenda $AB = \frac{1}{3} p$, e sul prolungamento BR si alzino infinite perpendicolari RC , ciascuna delle quali si faccia di tale lunghezza, che il suo quadrato sia eguale al cubo della corrispondente ascissa BR , diviso per $\frac{27}{16} p$.

Il punto B (CX) farà l'origine dell'evoluta, o seconda parabola cubica, e tutti i punti C staranno nel suo perimetro, poichè per la costruzione farà in ciascun punto $\overline{BR} = \frac{27}{16} p \cdot \overline{RC}^2$.

Se le ordinate BS' si prenderanno dalla parte opposta alla BS (Fig. 32.), si avrà da questa parte un'altra seconda parabola cubica BC' simile alla prima BC , ma inversamente posta, quale farà la sviluppata all'altro ramo AM' della parabola. Dunque la sviluppata alla parabola avrà in B , ove corrisponde il minimo raggio osculatore, un punto di regresso.

CXIII.

PROBLEMA 4.° Cercare il valore del Raggio osculatore e del Co-raggio nell'iperbola equilatera riferita agli asintoti, data la sua equazione $xy = aa$.

Sia A (Fig. 33.) il vertice della curva, AM , Am i suoi rami, S il suo centro, ed SP , Sp gli Asintoti. Differenziando due volte l'equazione, col supporre $ddx = 0$, si ha $dy = -\frac{x^2 dx}{y^2}$, e $ddy = -\frac{2x^2 dx}{y^3}$. Questi valori, sostituiti nelle formole del raggio osculatore, e co-raggio, danno $MC = \frac{-(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 y^2}$, ed $MQ = \frac{-(x^2 + y^2)}{2y}$, valori negativi, che si devono prendere dalla parte concava dell'Iperbola, mentre la data equazione appartiene alla parte convessa, ed il segno negativo indica una contraria posizione di queste rette.

CXIV.

COROLLARIO 1.° Per determinare con una semplice costruzione la posizione del raggio osculatore, e del co-raggio per un dato punto M dell'Iperbola, si chiami x la sua ascissa SP , y la sua ordinata MP ; si conduca da S la retta SM , e questa si prolunghi verso E , facendo $ME = \frac{1}{2}SM$; in E si alzi alla SE la perpendicolare EQ , che incontri in Q l'ordinata PM prolungata; da Q si meni QC parallela all'asintoto SP , ed in M si alzi la normale MC alla curva, che incontri in C la retta QC . Sarà MC il raggio del circolo osculatore pel punto M , MQ il co-raggio, e C il punto del contatto del raggio coll' evo.

luta; poichè dai triangoli simili SPM , EMQ si ha $PM:MS::EM:MQ$, cioè $y:\sqrt{x^2+y^2}::\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}:MQ$
 $= \frac{xy+y^2}{xy}$, ossia $\frac{xy+y^2}{-xy}$, essendo MQ dalla parte de' negativi: dunque MQ è il Co-raggio corrispondente al punto M . Il rimanente della costruzione è per se chiaro abbastanza.

CXV.

COROLLARIO 2.^o Si differenzj $\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{-2xy}$, il differenziale si eguagli a zero, e dalla formata equazione si cavi il valore di x ; si troverà $x=a$, $MC=-\sqrt{2a^2}$, ed $MQ=-a$. Cioè il minimo raggio osculatore corrisponderà al vertice dell' Iperbola, farà eguale al semiasse principale SA , e dovrassi prendere sopra quest' asse dal vertice S in D ; poichè se dal vertice A si condurrà la AB perpendicolare all' asintoto, farà $SB=x=a$, $AB=y=a$, e $-AS$, ossia $AD=-\sqrt{2a^2}$.

CXVI.

PROBLEMA 5.^o Cercare il Raggio osculatore nella comune logaritmica.

Sia MN questa curva (Fig. 34.); AQ il suo asse, A l' origine delle ascisse, l' ascissa $AP=x$, l' ordinata corrispondente $PM=y$; la sottangente a questa curva essendo costante (LVI.) si faccia $=a$. Sarà $\frac{ydy}{dy}=a$, $dy=\frac{ydx}{a}$, $dy^2=\frac{y^2dx^2}{a^2}$, e $ddy=\frac{dydx}{a}=\frac{ydx^2}{a}$. Quindi sostituendo i valori di dy^2 , e ddy nella formola del raggio osculatore

$$-\frac{ds^2}{dx dy}, \text{ farà } MC = \frac{-s^2 \left(ds^2 + \frac{y^2 ds^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{y dx} =$$

$$-\frac{(s^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{ay}.$$

Nella logaritmica avvi un punto al quale corrisponde un raggio osculatore minimo; per ritrovarlo si eguagli a Zero il differenziale di $-\frac{(s^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{ay}$, ed operando al solito modo e riducendo si avrà $y^2 = \frac{1}{2} s^2$, ed $y = s \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ma in questa curva l'ascissa x è eguale al logaritmo iperbolico dell'ordinata y moltiplicato pel modulo, o sottangente s , cioè $x = s \log y$. Dunque sarà $x = s \log s \sqrt{\frac{1}{2}}$; e perciò fatto $AP = s \log s \sqrt{\frac{1}{2}}$, e condotta l'ordinata PM , in M corrisponderà il minimo raggio osculatore, e la sviluppata sarà *cuspide* in C , cioè avrà quivi un punto di regresso.

CXVII.

PROBLEMA 6.^o Cercare il Raggio osculatore, il Co-raggio, e la sviluppata nella spirale logaritmica.

La principale proprietà della spirale logaritmica si è, che condotta ad un qualunque punto M del suo perimetro (Fig. 35.) la tangente MT , e dal foco A l'ordinata AM , l'angolo AMT debba essere costante. Però, supposta la Am infinitamente prossima alla AM , e descritto col raggio AM e centro A l'arco di circolo MR , essendo la sottangente AT normale all'ordinata AM , sarà costante la ragione di queste due rette, e quella dalle differenze loro mR , MR ; onde, facendo $AM = y$, ed $MR = dx$, sarà $\frac{dx}{dy} = a$ l'equazione a questa curva. Differenziando quest'equazione avraf-

R

si $ddy = 0$, e sostituendo questo valore nelle formole del raggio osculatore, e del co-raggio per le curve riferite ad

$$\text{un foco si troverà } MC = \frac{y \left(dx^2 + \frac{dy^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{dx^2 + \frac{dy^2}{x^2}} = \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + 1},$$

$$\text{ed } MQ = \frac{y dx^2 + \frac{y dy^2}{x^2}}{dx^2 + \frac{dy^2}{x^2}} = y = AM, \text{ cioè il co-raggio eguale}$$

all'ordinata.

Per avere la sviluppata. In A si alzi la perpendicolare AC alla AM , quale si prolunghi fino ad incontrare la tangente in T , ed in M si conduca la normale MC alla curva. Dalla simiglianza de' triangoli rettangoli AMC ,

$$MRm \text{ si ha } MR : Mm :: MA : MC = \frac{MA \cdot Mm}{MR} =$$

$$y \sqrt{\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} \right)} = y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)} = y \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$= \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + 1}$. Dunque MC farà il raggio osculatore, ed AC il Co-raggio della curva, e per essere ancora costante l'angolo AMT , ed $AMT = ACM$, l'evoluta AC farà una curva di tale proprietà, che l'angolo formato da una qualunque sua tangente MC , e dalla corrispondente ordinata AC farà costante: cioè essa farà una spirale logaritmica eguale alla data. Pertanto se prenderassi un raggio $AD = AC$, e si concepirà, che la logaritmica ABD s'aggiri intorno al punto A , finchè AD cada sopra AC , e la curva nella posizione AHC , la logaritmica in questa posizione farà evoluta a se stessa nella prima posizione AED .

CXVIII.

PROBLEMA 7.^o Cercare il valore del Raggio Osculatore nella Cicloide ordinaria, e l'equazione alla sua Evoluta.

Si chiami x l'ascissa AP (Fig. 36.) del circolo generatore della cicloide, $\sqrt{ax - xx}$ la corrispondente ordinata NP , u l'arco circolare $AN = MN$, y la $MP = MN + NP = u + \sqrt{ax - xx}$, e si conduca la mp infinitamente prossima alla MP , ed Nq parallela al diametro AB .

$$\begin{aligned} \text{Sarà } Nq &= du, \quad nq = d(NP) = \frac{adx - xdx}{2\sqrt{ax - xx}}, \quad Nn = du \\ &= \sqrt{Nq^2 + nq^2} = \sqrt{du^2 + \left(\frac{adx - xdx}{2\sqrt{ax - xx}}\right)^2} = \\ &= \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}; \text{ onde } dy = du + d\sqrt{ax - xx} = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}, \\ ddy &= \frac{-adx^2}{2x\sqrt{ax - xx}}, \text{ e finalmente, sostituendo questi valori} \\ &\text{nella formola generale del raggio osculatore, si avrà} \\ MC &= \sqrt{\frac{dx^2 + \frac{a^2 dx^2 - 2axdx + x^2 dx^2}{ax - xx}}{\frac{adx^2}{2x\sqrt{ax - xx}}}} = 2\sqrt{a^2 - ax}. \end{aligned}$$

Ma per la proprietà del circolo $BN = \sqrt{a^2 - ax}$. Dunque $MC = 2BN$, cioè nella Cicloide ordinaria il raggio osculatore è il doppio della corda corrispondente BN del circolo generatore.

Quindi, se prenderassi $x = 0$, farà $MC = 2a$,
 se $x = \frac{1}{2}a$, farà $MC = a$,
 se $x = \frac{3}{4}a$, farà $MC = \frac{1}{2}a$,
 se $x = a$, farà $MC = 0$,

Cioè nella Cicloide il raggio del circolo osculatore all' origine dell' asse è il doppio dello stesso asse; ai $\frac{1}{2}$ dell' asse è eguale all' asse; ai $\frac{3}{4}$ è eguale alla metà dell' asse, ed è nullo all' estremità della base, ossia in R . Dunque l' evoluta avrà la sua origine nel punto R .

Per soddisfare alla seconda parte del problema, si alzi in R perpendicolarmente a BR la $RS = AB$, si descriva il semicircolo RVS , si prenda l' arco $RV = NB$, da M si conduca MC parallela alla BN , da V la TC parallela alla RB , e menifi la corda RV .

Per questa costruzione sarà Arc. $AN = MN = BQ$, ed Arc. $BN = RQ = VC$; Ma Arc. $RV =$ Arc. BN ; dunque Arc. $RV = VC$; cioè il punto C starà nella Cicloide inferiore RCX descritta dal circolo RVS , ed MC sarà tangente alla medesima in C , poichè parallela alla RV ; ed inoltre, essendo $QC = RV = NB = MQ$, la tangente MC sarà doppia alla corda BN , cioè farà il raggio osculatore della Cicloide AMR . Dunque l' evoluta della Cicloide AMR è la Cicloide RCX ad essa eguale, ed inversamente descritta.

CXIX.

COROLLARIO. L' arco della semicicloide ordinaria AR è eguale al doppio diametro del circolo genitore, e l' intera cicloide è quattro volte lo stesso diametro; poichè il raggio osculatore nell' origine R è zero, e quello al vertice A è eguale a $2AB = AX = RX = RA$.

CAPO DECIMO.

DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO, E DI REGRESSO
E DE' PUNTI SERPENTINI NELLE CURVE.

CXX.

*P*unto *singolare* di una curva si chiama quello, il quale ha qualche proprietà non comune agli altri punti dell' istessa curva. I *punti Multipli*, quelli d' *Inflessione*, di *Regresso*, ed i *Serpentini* sono tutti punti singolari. De' punti multipli se n' è parlato abbastanza nel capo settimo. Il punto d' *Inflessione*, ossia di *Flesso contrario* è quello, in cui una curva da concava, che essa era rispetto ad una retta data di posizione, diventa convessa, o da convessa diventa concava. (Fig. 37, e 38.). Il punto di *Regresso* è quello, in cui la curva continuando ad esser o concava, o convessa si ritorce all' indietro rispetto a quella stessa retta. (Fig. 39, e 40).

CXXI.

Ogni punto di flesso, o di regresso *M* (Fig. 41.) porta seco due elementi della curva, cioè due archetti infinitesimi, i quali o giacciono in una stessa linea retta, o si si compenetrano collo stesso punto *M*; quindi è che la curvatura in *M* è o nulla, o infinita, e che perciò nella ricerca di un flesso, o di un regresso dovrà eguagliarsi all' infinito, oppure al zero il valore del raggio osculatore; ovvero, siccome ciascuna delle formole esprimenti lo stesso valore è una frazione, basterà eguagliare a zero il nume-

134 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO, E DI REGRESSO, ratore, od il denominatore di questa formola (*). Così chiamando R il raggio osculatore, per le curve riferite ad un asse, in cui $R = \frac{-dx'}{dxddy}$, si farà $-ds' = 0$, ovvero $dxddy = 0$; e per quelle riferite ad un foco, nelle quali $R = \frac{yds'}{dxds' - ydxddy}$, si farà $yds' = 0$, ovvero $dxds' - ydxddy = 0$.

CXXII.

A determinare se il punto trovato M sia veramente un punto d'inflessione, oppure di regresso, e quale dei due, giacchè il metodo non solo non distingue un punto dall' altro, ma può eziandio somministrare qualch' altro punto singolare della curva, si cerchino i raggi osculatori pe' due archetti infinitesimi e consecutivi, che stanno l' uno, di quà, e l' altro di là dal punto M , e gli angoli di curvatura per questi stessi archetti. Se i due raggi osculatori trovati avranno segni simili, non si avrà in M nè un semplice flesso contrario, nè un regresso, ma bensì si avrà un flesso invisibile, di cui parlerassi sulla fine di questo capo, e se i due raggi osculatori avranno segni dissimili, si avrà in M un flesso contrario, ovvero un regresso, secondochè i due angoli di curvatura avranno o segni dissimili, o segni simili. La ragione di ciò si è, che l'angolo di curvatura non può cambiare il suo segno di $+$ in $-$, o di $-$ in $+$, se non dove la curva di concava all' asse od al foco si fa convessa, o di convessa si fa concava.

(*) Sia P il numeratore, e Q il denominatore della frazione, che esprime il valore del raggio osculatore. Sarà $R = \frac{P}{Q}$: ora se $\frac{P}{Q} = \infty$ conviene, che Q sia infinitamente piccolo rispetto a P , onde si farà $Q = 0$; se $\frac{P}{Q} = 0$, P deve essere infinitamente piccolo rispetto a Q , e perciò si farà $P = 0$. Dunque nel caso di un flesso contrario, o di un regresso dovrà farsi $Q = 0$, ovvero $P = 0$.

CXXIII.

PROBLEMA 1.° *Data l'equazione di una curva riferita ad un asse trovare i suoi punti di flesso contrario e di regresso.*

Sia la curva dell'equazione $y' = a' + x'$. Differenziando si ha $dy = \frac{x' dx}{y'}$, $ddy = \frac{2x dx' - 2y dy'}{y'^2} = \frac{2xy' dx' - 2x' dx^2}{y'^2}$, ossia, mettendo nel numeratore il valore di y' , $ddy = \frac{2a' x dx'}{y'^2}$, e sostituendo questo valore nella formola del raggio osculatore si trova $R = \frac{-(y' + x')^{\frac{3}{2}}}{2a' xy}$.

Il numeratore eguagliato al zero dà l'equazione — $(y' + x')^{\frac{3}{2}} = 0$, dalla quale si ricava $x = \pm \sqrt[4]{-y'}$,

quantità immaginaria che non fa conoscer niente.

Il denominatore paragonato anch' esso al zero dà $2a' xy = 0$, donde $x = 0$, ed $y = 0$. Il valore $x = 0$ posto nella data equazione dà $y = a'$, ed il valore $y = 0$ sostituito nella medesima dà $x = -a'$.

Esaminando questi due valori di x , e principiando dal primo $x = 0$, si faccia $x = 0 \pm d\alpha$, ossia $x = \pm d\alpha$, sarà $R = \frac{\mp \sqrt{(a' + dx')^3}}{2a' dx}$; cioè, posto $x = d\alpha$, R avrà un valore positivo, e posto $x = -d\alpha$, R avrà un valore positivo.

Dunque nel punto della curva, ove corrisponde l' ascissa $x = 0$, v' è un flesso contrario, oppure un regresso. Per conoscere quale dei due egli sia, si esamini il valore dell' angolo di curvatura, che in questa curva, fatte le solite sostituzioni, trovasi essere $q = \frac{-2a' x dx'}{y' + x' y}$.

136 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO E DI REGRESSO,

Se in questo valore invece di x si pone dx , si avrà $q = -\frac{2a^2 dx^2}{y^3 + ydx^2}$ valore negativo, e se al contrario invece di x si pone $-dx$ si avrà $q = \frac{2a^2 dx^2}{y^3 + ydx^2}$ valore positivo. Dunque all' ascissa $x=0$, cioè all' origine delle ascisse, corrisponde un punto di flesso contrario, e non un punto di regresso.

Quanto al valore $x = -a \pm dx$ si avrà $y = \sqrt[3]{(\pm 3a^2 dx)}$. Quindi $R = \pm \frac{\sqrt{(y^3 + x^3)^2}}{2a^2 (a^3 + dx)^{\frac{1}{2}}}$, e $q = \pm \frac{2a^2 dx}{(y^3 + x^3)(3a^2 dx)^{\frac{1}{2}}}$.

Dunque all' ascissa $-a$ corrisponde un altro punto di flesso contrario.

Abbiasi l' equazione $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$. Sarà $dy = \frac{2a^2 x dx}{(a^2 + x^2)^2}$, $ddy = \frac{2a^2 dx^2 - 6a^2 x^2 dx^2}{(a^2 + x^2)^3}$, ed $R = -\frac{\left(1 + \frac{4a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2a^2 - 6a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2}}$.

Il numeratore eguagliato a Zero non vale perchè dà una quantità immaginaria. Il Denominatore dà $\frac{2a^2 - 6a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} = 0$, e perciò $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$, e sostituendo questo valore nella data equazione sarà $y = \frac{1}{3}a$, valori corrispondenti ad un punto d' inflessione; poichè, essendo $q = -\frac{(2a^2 - 6a^2 x^2)(a^2 + x^2) dx}{(a^2 + x^2)^3 + 4a^2 x^2}$, se invece si pone $\sqrt{\frac{a}{3}} \pm dx$, si avranno due valori di q con segni dissimili.

Nella curva dell' equazione $y = a + (x-a)^{\frac{1}{2}}$ si ha $dy = \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} dx$, $ddy = -\frac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} dx^2$, ed $R =$

$$\frac{\left(1 + \frac{9}{25}(x-a)^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{5}}}{\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}}, \text{ il cui denominatore fatto eguale}$$

a zero dà l'equazione $\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}=0$, quindi $x=a$, ed $y=a$, valori corrispondenti al punto di flesso.

Sia la curva dell'equazione $y = a - (x-b)^{\frac{2}{5}}$.

$$\text{Sarà } dy = -\frac{2}{5}(x-b)^{-\frac{3}{5}}dx, \quad ddy = -\left(1 + \frac{4}{9}(x-b)^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{5}}dx, \quad R = \frac{-\left(1 + \frac{4}{9}(x-b)^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{5}}dx}{\frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{5}}}$$

$$\text{e } q = \frac{-\frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{5}}dx}{1 + \frac{4}{9}(x-b)^{-\frac{2}{5}}}. \text{ Il numeratore di } R \text{ posto}$$

eguale al Zero dà una quantità immaginaria; ma il denominatore dà $x=b$, ed $y=a$. Posto $x=b \pm dx$ i due valori di R hanno segni dissimili, e quelli di q sono amendue negativi: dunque il punto ritrovato è un regresso.

GXXIV.

PROBLEMA 2.^o *Determinare il flesso contrario nell'ordinaria Concoide.*

Sia RS una retta indefinita (Fig. 42.), e P un punto preso fuori di essa; da questo punto siano condotte alla RS infinite rette, e sopra di queste siano prese dall'una, e dall'altra parte della RS le parti $EM, E'M', E''M'',$ ec. $Em, E'm', E''m'',$ ec. tra loro eguali. La curva che passa per tutti i punti $M, M', M'',$ ec. presi superiormente alla RS , si chiama *Concoide superiore*, e la curva, che passa

138 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO, E DI REGRESSO ,
per tutti i punti m, m', m'' ec. presi al di sotto della stessa RS ,
chiamasi *Concaide inferiore*. La retta RS , che è ancora as-
sintoto a queste due curve, dicesi *Direttrice*, la retta PCA
calata da P perpendicolarmente alla RS Affe, ed il punto P
Polo delle due curve.

Per la meccanica descrizione di questa curva si può an-
che immaginare, che lungo l' indefinita RS scorra un cir-
colo di raggio determinato in guisa che, rimanendo sempre
il centro C nella retta RS , un qualche suo diametro Aa si
dirigga continuamente al polo P . Egli è evidente, che le
due estremità A, a di questo diametro descriveranno sul
piano della carta le due concaide $MM'M', mm'm''$.

Ciò posto, sia $CQ = x$, $QM = y$, $CA = a$, $PC = b$;
sarà $ML = \sqrt{(EM)^2 - (EL)^2} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Ma, i due
triangoli simili PQM, ELM danno $EL : ML :: PQ : QM$,
ossia $x : \sqrt{(a^2 - x^2)} :: b + x : y$. Dunque sarà $y =$
 $\frac{(b+x)\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$. Questa è l' equazione della curva riferita

all' affe AP , quale differenziata dà $dy = \frac{-x^2 dx - a^2 b dx}{x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}$,

e $ddy = \frac{(2a^2 b - a^2 x^2 - 3a^2 bx^2) dx^2}{x^3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Il denominatore di R ,

che è $dxddy = \frac{(2a^2 b - a^2 x^2 - 3a^2 bx^2) dx^2}{x^3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ fatto eguale a zero,

dà l' equazione di terzo grado $x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b = 0$, in
cui una delle radici sarà il valore cercato di CQ .

Se $a = b$, l' equazione precedente trasformerassi in
 $x^3 + 3ax^2 - 2a^2 = 0$, e dividendo per $x + a$ si avrà $x^2 + 2ax$
 $- 2aa = 0$, onde x , ossia $CQ = -a + \sqrt{(3a^2)} =$
 $a(\sqrt{3} - 1)$.

Diversamente volendo considerare questa curva come riferita al polo P , si immagini l'altra ordinata PV infinitamente prossima alla PM , e sia descritto col raggio PM l'archetto di circolo MN , e col raggio PE l'archetto ET . Si faccia $PM = y$, $AC = a$, $PC = b$, $PE = z$, $MN = dx$, $GT = dz$. Sarà l'equazione alla conoide superiore $y = z + a$, il cui differenziale è $dy = dz$. Dai due settori MPN , EPT si ha $MP:EP::MN:ET$, ossia $y:z::dx:ET = \frac{zdx}{y}$, e dai due triangoli simili PCE , EGT ,

$PC:CE::ET, GT$, ossia $b:\sqrt{(z^2 - b^2)}::\frac{zdx}{y}:dz = \frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$; ma $dz = dy$. Dunque $dy = \frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$, e differenziando ancora quest'equazione farà $ddy = \frac{(2yz^2 - b^2y - z^3 + b^2z)dx}{by^2\sqrt{(z^2 - b^2)}}$, ossia, mettendo $\frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$ invece di dz , $ddy = \frac{(2yz^2 - b^2yz - z^4 + b^2z^2)dx^2}{b^2y^3}$, e sostituendo il valore $y = z + a$ farà $ddy = \frac{(z^4 + 2az^3 - ab^2z)dx^2}{b^2(z+a)^3}$.

Ora prendendo la formola del raggio osculatore per le curve riferite al foco, eguagliando a zero il suo denominatore $dx^3 + dx^2dy - ydxddy$, e sostituendo in essa i valori di y , dy , ddy si avrà $\frac{(a^2b^2 + 3ab^2z - 2az^3)dx^3}{b^2(z+a)^3} = 0$, e quindi l'equazione di terzo grado $ab^2 + 3b^2z - 2z^3 = 0$, in cui una delle radici accresciuta della costante a darà il valore dell'ordinata PM .

Se $a = b$, l'equazione diventa $a^3 + 3a^2z - 2z^3 = 0$, ossia $z^3 - \frac{3a^2z}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$, in cui si hanno le tre radici

140 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO E DI REGRESSO,

$z = -a, z = \frac{1}{3}a(1 - \sqrt{3}), z = \frac{1}{3}a(1 + \sqrt{3})$. Le prime due negative non servono, la terza accresciuta della costante a dà il valore di y , ossia di PM corrispondente, al flesso contrario in M .

In simil guisa si potrà ancora ritrovare il flesso contrario nella Concoide inferiore $m m' m''$.

CXXV.

Altri punti di regresso si considerano nelle curve. Sia AP l'asse di una curva, BM, Bm due rami della medesima, i quali s'incontrano, e terminano in qualche punto B , formandovi un punto di regresso. Se questi due rami si volgono scambievolmente le loro convessità come nelle Figure 43 e 44 il regresso dicesi di prima specie, e di seconda specie si chiama, quando l'uno de' rami rivolge il suo concavo verso la convessità dell'altro ramo come nelle Figure 45 e 46.

CXXVI.

La sola ispezione delle curve suggerisce come si debba procedere nella ricerca di tai punti di regresso. Dal punto di regresso B si cali all'ascissa AP la normale AB , e si assuma il punto A per origine delle ascisse. E' chiaro
1.° Che a ciascun ascissa AP presa da A andando verso P corrispondono almeno dentro un certo limite, due ordinate PM, Pm . 2.° Che, prendendo delle ascisse dalla parte opposta, cioè da B andando verso p , le ordinate corrispondenti sono tutte immaginarie, poichè i due rami della curva non oltrepassano il punto di regresso B . 3.° Che

all' origine A delle ascisse corrispondono due ordinate eguali, le quali si confondono in una sola. 4.° Che il raggio osculatore in B , perciò che si è detto di sopra (CXXII), deve essere o infinito, o zero. 5.° Che prendendo AP infinitamente piccola i due raggi osculatori a quest' ascissa corrispondenti devono avere segni dissimili, quando il punto di regresso è di prima specie, e segni simili quando questi sia di seconda specie; poichè i due archetti infinitesimi ed infinitamente prossimi al punto di regresso nel 1.° caso volgono i loro concavi da parti opposte, e nel secondo caso li volgono da una stessa parte. 6.° Che i medesimi due raggi osculatori devono indicare la posizione dell' asse rispetto al concavo, od al convesso di ciascun ramo della curva.

Per esempio nella curva dell' equazione $y^2 = x^3$ si hanno due valori di y , cioè $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$, i quali dinotano due rami. Se si prende la x dalla parte de' negativi l' equazione diventa $y^2 = -x^3$, ed i valori di y risultano amendue immaginari.

Però differenziando la data equazione, ed operando al solito modo, si trova $R = \mp \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{3}{2} x)^{\frac{1}{2}}$. Si faccia $x = 0$, si avrà $y = 0$, ed $R = 0$. Si faccia $x = 0 + d\pi$, ossia $x = d\pi$, ed avrassi di nuovo due valori reali di R con segni dissimili. Dunque i due rami della curva partono dall' origine delle ascisse, dove l' ascissa, l' ordinata, e l' raggio osculatore sono eguali a zero, formano in questo punto un regresso di prima specie, e rivolgono le loro convessità all' asse. La figura 41 rappresenta questa curva.

Al contrario nella curva dell' equazione $y = a + x^m \pm x^{\frac{m}{2}}$, in cui m è numero intero maggiore dell' unità, ed n numero dispari non minore di 5 i due rami formano un re-

142 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO E DI REGRESSO, greffo di seconda specie all' origine della curva, dove $x=0$, ed $y=a$; poichè i raggi osculatori de' due archetti infinitamente prossimi al punto di regresso sono amendue negativi. Questa curva è rappresentata dalla figura 45, in cui i due rami BM , Bm volgono il loro convesso al comune asse AP , e dove all' ascissa $x=0$ corrisponde l' ordinata $y=AB=a$.

I regressi di ciascuna delle due specie nelle curve riferite ad un foco si trovano appresso a poco allo stesso modo. Ma diciamo due parole intorno ai punti serpentine delle curve.

CXXVII.

Quando una curva ha più punti d' inflessione, l' equazione al zero del numeratore, o del denominatore del raggio osculatore deve dare più valori di x e di y , cioè tanti valori di x , e di y quanti punti d' inflessione si trovano nella curva. Questo succede nelle curve, che vanno serpeggiando come nella figura 47.

Se due di questi punti M , m sono infinitamente vicini la curva sembra non averli, cioè i due flessi contrarij in M ed m non sono visibili nella curva; poichè se per ipotesi la curva prima di giugnere al punto M è concava rispetto ad una retta AB data di posizione, in M diventa convessa, e nel punto m infinitamente prossimo ritorna concava alla stessa AB . Questi punti si chiamano *Punti di flesso invisibile*, ed il punto, in cui essi due punti suppongonsi compenetrarsi, dicesi *Punto Serpentino di primo ordine*.

CXVIII.

Per conoscere se una curva abbia qualche punto serpentino, si cerchi col metodo precedente se in essa vi abbia alcun punto, in cui $R = 0$, oppure $R = \infty$.

Trovato questo punto nella curva si cerchino i raggi osculatori de' due archetti infinitesimi, che lo comprendono immediatamente. Se questi due raggi osculatori hanno segni simili, il punto trovato sarà un punto serpentino di primo ordine; poichè i due archetti infinitesimi, tra i quali esso giace, volgono i loro concavi da una stessa parte della Curva.

CXXIX.

Se la curva ha tre punti di flesso contrario infinitamente prossimi, due di questi sono invisibili, ed il terzo visibile, cioè l'inflessione della curva è visibile; mentre supponendo la curva concava rispetto ad una retta qualunque il primo punto d'inflessione la rende convessa a questa retta, il secondo punto la fa concava, ed il terzo la rende di nuovo convessa.

Se i flessi uniti sono quattro l'inflessione della curva è invisibile, poichè dopo il quarto punto la curva è come prima o concava, o convessa verso la stessa parte.

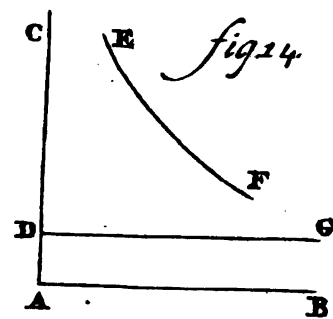
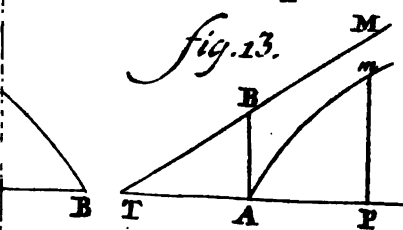
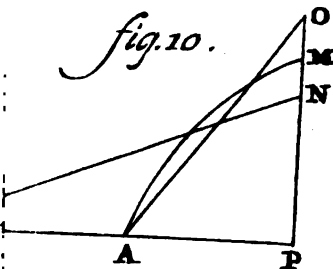
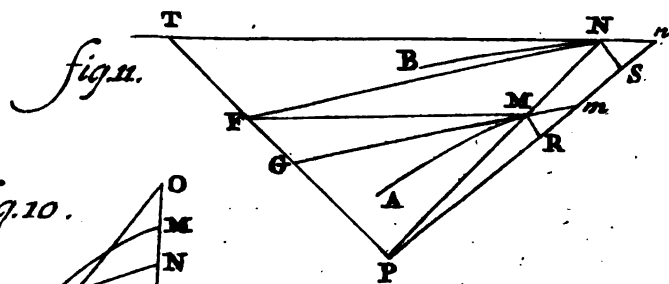
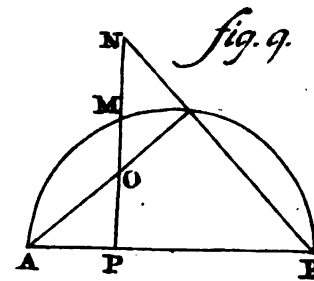
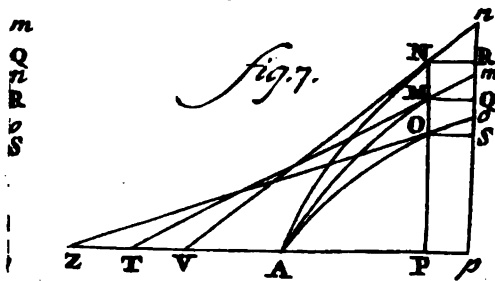
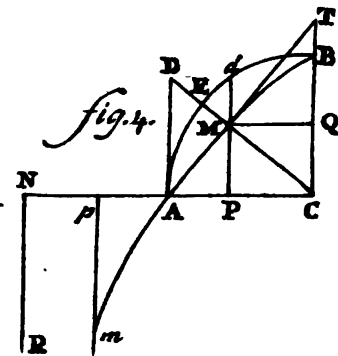
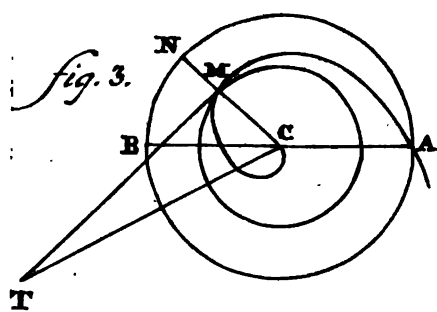
E in generale, se il numero dei punti di flesso contrario è m , l'inflessione è visibile, o invisibile, secondo che m è numero impari, o pari.

144 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO E DI REGRESSO ec.

Le curve, in cui trovansi varj di questi flessi infinitamente vicini, si chiamano *Serpentine*, ed il punto, in cui essi flessi si suppongono compenetrati, chiamasi *Punto Serpentinò d'ordine superiore*.

F I N E.

		<i>Errori</i>	<i>Correzioni</i>
pag. 11	lin. 3	negativo	positivo, negativo
	6	esponente	esponente
27	5	degli	degli itati
57	8	$\frac{2}{dy} =$	$\frac{2}{dy}$
70	24	que	queste
82	23	questo	questo valore
125	8	$= n \frac{1}{2} a$	$n = \frac{1}{2} a$
136	18	invece	invece di x

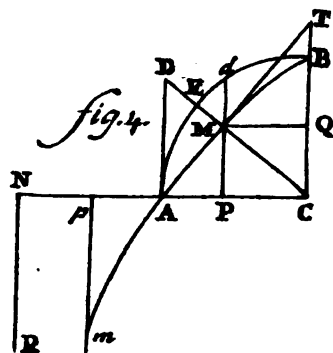
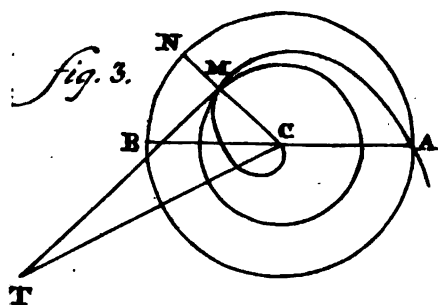


144 DE' PUNTI DI FLESSO CONTRARIO EDI REGRESSO ec.

Le curve, in cui trovansi varj di questi flessi infinitamente vicini, si chiamano *Serpentine*, ed il punto, in cui essi flessi si suppongono compenetrati, chiamasi *Punto Serpentinò d'ordine superiore*.

F I N E.

		<i>Errori</i>	<i>Correzioni</i>
pag. 11	lin. 3	negativo	positivo, negativo
	6	esponente	esponente
27	5	degli	degli stati
57	8	$\frac{2}{dy} =$	$\frac{2}{dy}$
70	24	que	queste
82	23	questo	questo valore
125	8	$= n \frac{1}{2} s$	$n = \frac{1}{2} s$
136	18	invece	invece di x



m
Q
P
N
S
O
M
B
n

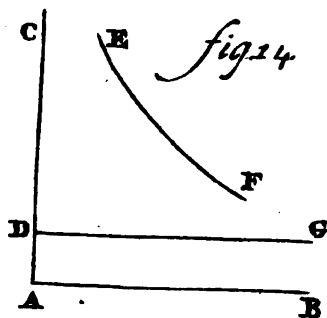
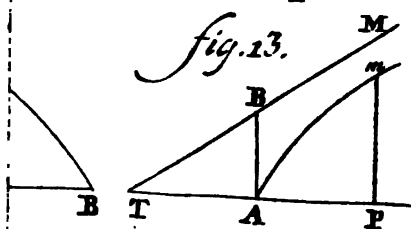
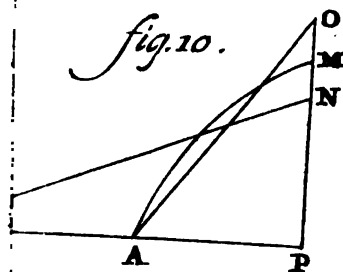
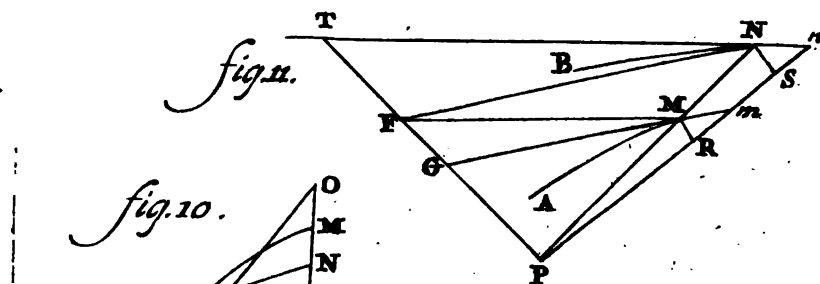
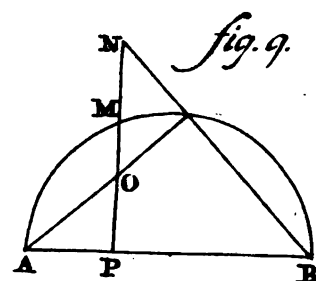
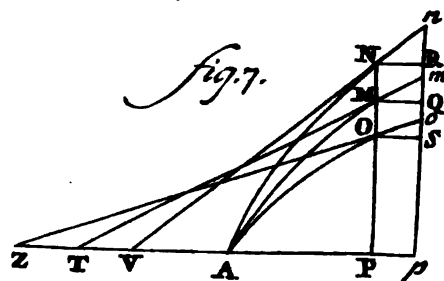


fig. 16.

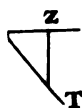


fig. 17.

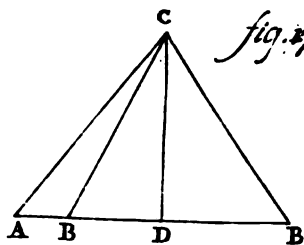


fig. 18.

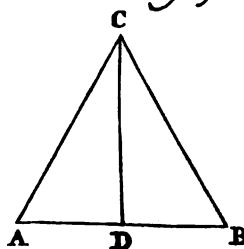


fig. 21.

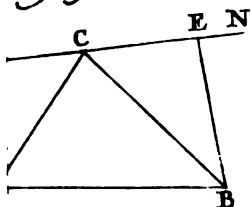


fig. 22.

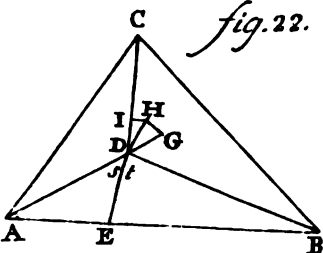


fig. 23.

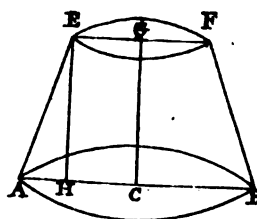


fig. 26.

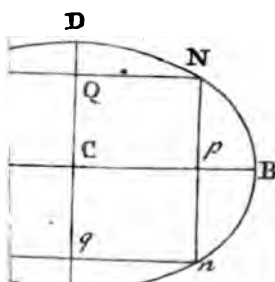


fig. 27.

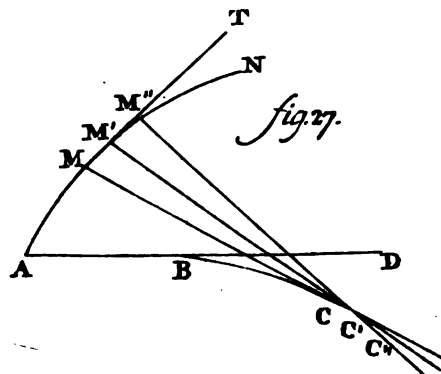


fig. 30.

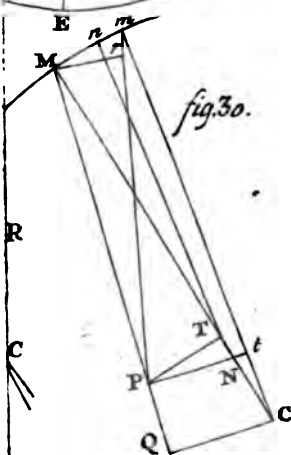


fig. 31.

